Estatística de Redes Sociais

Complementos e exercícios preparatórios para a 21ª aula.
7 de novembro de 2020

Os modelos e as questões apresentadas a seguir terão um papel importante na 21ª aula. Peço a todos os estudantes do curso de Estatística de Redes Sociais, que se empenhem em entender os modelos, trabalhando nos exercícios, **antes da aula.** Esses complementos e exercícios tem como objetivo ajudar-nos a entender as diferenças de comportamento da rede com pressão social nos casos em que a polarização é muito pequena ou muito grande.

1. Seja N um número inteiro estritamente positivo, e seja $\mathcal{Z}_N = \{-N, -N+1, ..., -1, 0, +1, ..., N-1, N\}$ o conjunto dos números inteiros entre $-N$ e N. Para todo $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, vamos definir a cadeia $(S_n^\lambda)_{n\geq 0}$ da seguinte maneira:

   - Escolhemos S_0^λ arbitrariamente em $\mathcal{Z}_N$;
   - para todo $n \geq 1$,
   $$S_n^\lambda = S_{n-1}^\lambda + O_n^\lambda, \tag{1}$$
   com os incrementos aleatórios O_n^λ satisfazendo as seguintes condições:
   - $O_n^\lambda \in \mathcal{O} = \{-1, +1\}$;
   - as variáveis aleatórias $(O_n^\lambda)_{n\geq 1}$ são independentes entre si (mas não tem a mesma distribuição!);
   - para todo $o \in \mathcal{O}$,
   $$\mathbb{P}(O_n^\lambda = o | S_{n-1}^\lambda = z) = \frac{e^{\lambda o \text{ sinal}(z)}}{e^{\lambda \text{ sinal}(z)} + e^{-\lambda \text{ sinal}(z)}},$$
   onde neste exercício definimos
   $$\text{sinal}(z) = \begin{cases} +1, \text{ se } z > 0, \\ -1, \text{ se } z < 0, \\ 0, \text{ se } z = 0, \end{cases}$$
   - Na fórmula 1 usamos as convenção de que $N + 1 = N$ e $-N - 1 = -N$.

   (a) Suponha que $z \neq 0$. Calcule
   $$\mathbb{P}(O_n^\lambda = \text{sinal}(z) | S_{n-1}^\lambda = z)$$
   para λ positivo, negativo e nulo.

   (b) Começando com $S_0^\lambda = 0$, tente entender como o valor de λ afeta o comportamento da cadeia ao longo do tempo. Se puder, faça uma simulação com $N = 10$ e descreva os comportamentos que você observar.

   (c) Definimos a pressão
   $$p^\lambda = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} S_i^\lambda.$$
   Como varia p^λ em função do sinal e do valor absoluto de λ? Em particular, quanto você acha que vale $p^{+\infty}$, $p^{-\infty}$ e p^0?

   (d) Quais são as diferenças observadas na evolução da cadeia $(S_n^\lambda)_{n\geq 0}$ nos casos em que $\lambda = 0$ e $\lambda = -\infty$?

   (e) Lembre da discussão que tivemos no final da aula 20:
   - Vamos discutir e sumarizar as diferenças entre o caso $\beta = 0$ e $\beta = +\infty$.
   - Será que essas diferenças continuam existindo, nos casos extremos em que $\beta > 0$ mas próximo de 0 de um lado, ou $\beta < +\infty$ mas muito grande?
   - O que significa β ser muito grande?

   Pense sobre como esse exercício pode nos ajudar a entender essa discussão.

2. Vamos considerar um modelo de rede com pressão social com a seguinte restrição: a pressão social sobre cada um dos atores não pode ser inferior a $-N$, nem superior a N, onde N é o número de atores presentes. A vantagem desse modelo é poder fazer contas mais simples, livrando-se dos denominadores complicados do modelo original. Vamos definir

- $\mathcal{A}_N = \{1, 2, ..., N\}$: conjunto de atores.
- $\tilde{\mathcal{A}}_N = \mathcal{A}_N \cup \{*\}$.
- Vamos considerar as variáveis aleatórias $(\tilde{A}_n^\beta)_{n\geq 1}$ com a seguinte interpretação:
  - $\tilde{A}_n^\beta = a \in \mathcal{A}_N$, se no instante n o ator a emitiu uma opinião,
  - $\tilde{A}_n^\beta = *$, se no instante n ninguém emitiu opinião.
- Como antes, $\beta \in [0, +\infty$ é o parâmetro de polarização.
- $\mathcal{O} = \{+1, -1\}$: conjunto de opiniões possíveis.
- $O_n^\beta \in \mathcal{O}$: opinião que a rede emitiria no instante n, se algum ator se manifestar.
- Para todo $a \in \mathcal{A}_N$, definimos $L_n^a = \max(m \leq n : \tilde{A}_m^\beta = a)$.
- Definimos também $L_n^* = \max(m \leq n : \tilde{A}_m^\beta = *)$.
- Para todo $a \in \mathcal{A}_N$, $\tilde{U}_n^\beta(a) = \sum_{m=L_n^a+1}^n O_m^\beta \mathbf{1}\{A_m^\beta \neq *\}$.
- $\tilde{U}_n^\beta = (\tilde{U}_n^\beta(1), \ldots, \tilde{U}_n^\beta(N))$.
- $\tilde{U}_n \in \tilde{\mathcal{S}}_N = \{(u(1), ..., u(N)) \in (\mathcal{Z}_N)^N : u(a) = 0, \text{ para algum } a \in \mathcal{A}_N\}$.

A evolução é assim definida: Para todo $u \in \tilde{\mathcal{S}}_N$, $a \in \mathcal{A}_N$, $o \in \mathcal{O}$,

$$\mathbb{P}(O_{n+1}^\beta = o, \tilde{A}_{n+1}^\beta = a \mid U_n^\beta = u) = Ce^{\beta o u(a)},$$

$$\mathbb{P}(O_{n+1}^\beta = o, \tilde{A}_{n+1}^\beta = * \mid U_n^\beta = u) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{o\in\mathcal{O}}\sum_{b\in\mathcal{A}_N} Ce^{\beta o u(b)}\right),$$

onde

$$C = \frac{1}{2 + (N-1)[e^{\beta N} + e^{-\beta N}]}$$

e

$$\tilde{U}_{n+1}^\beta = \tilde{\pi}_{\tilde{A}_{n+1}^\beta, O_{n+1}^\beta}(\tilde{U}_n^\beta).$$

As transformações

$$\tilde{\pi}_{*,o} : \mathcal{S}_N \to \mathcal{S}_N$$

e

$$\tilde{\pi}_{a,o} : \mathcal{S}_N \to \mathcal{S}_N,$$

onde $a \in \mathcal{A}_N$ e $o \in \mathcal{O}$ são assim definidas:

$$\tilde{\pi}_{*,o}(u) = u.$$

e

$$\tilde{\pi}_{a,o}(u)(b) = \begin{cases} u(b) + o & \text{, se } b \neq a \text{ e } |u(b) + o| \leq N, \\ u(b) & \text{, se } b \neq a \text{ e } |u(b) + o| > N, \\ 0 & \text{, se } b = a. \end{cases}$$

(a) Vamos simplificar a notação. Para $a \in \mathcal{A}_N$, $o \in \mathcal{O}$, e $u \in \tilde{\mathcal{S}}_N$, vamos usar a notação

$$Q^\beta(o, a|u) = Ce^{\beta o u(a)},$$

e

$$Q^\beta(*|u) = Q^\beta(+1, *|u) + Q^\beta(-1, *|u) = 1 - \sum_{o\in\mathcal{O}}\sum_{b\in\mathcal{A}_N} Ce^{\beta o u(b)}.$$

Encontre $u \in \tilde{\mathcal{S}}_N$ tal que $Q^\beta(*|u) = 0$. Quantas listas em $\tilde{\mathcal{S}}_N$ satisfazem essa condição?

(b) Reciprocamente, encontre, se houver, as lista $u \in \tilde{\mathcal{S}}_N$ que maximizam o valor de $Q^\beta(*|u)$.

(c) É verdade que para todo $a \in \mathcal{A}_N$ vale a igualdade

$$Q^\beta(+1, a|u) = Q^\beta(-1, a| - u)?$$

(d) Pensando nas desigualdades 1 e 2 demonstradas nas aulas anteriores, diga se a cadeia $(\tilde{U}_n^\beta)_{n\geq 0}$ possui uma medida de probabilidade invariante $\tilde{\mu}^\beta$. De modo geral, diga quais são as propriedade que verificamos para a cadeia $U_n^\beta)_{n\geq 0}$ que continuam verdadeira para a cadeia $(\tilde{U}_n^\beta)_{n\geq 0}$.

(e) Estamos agora trabalhando com uma rede cuja lista de pressões evolui no espaço $\tilde{\mathcal{S}}_N$. Assim sendo, torna-se desnecessário utilizar o Algoritmo 1 para simular simultaneamente duas evolução de partindo de duas listas diferentes de pressões.

Refaça o pseudo-código do algoritmo de simulação simultânea das duas listas, agora sem usar a parte que envolvia o Algoritmo 1.

Usando esse algoritmo simplificado, calcule um majorante para

$$|\mathbb{P}(\tilde{U}_n^{\beta,v} = u) - \tilde{\mu}^\beta(u)|.$$

Compare esse majorante com aquele que obtivemos com o modelo de rede com pressão social original.

(f) Seja $f : \tilde{\mathcal{S}}_N \to \mathbb{R}$ e seja v uma lista fixada em $\tilde{\mathcal{S}}_N$. Verifique a seguinte igualdade:

$$\mathbb{E}[f(U_1^{\beta,v})] = \sum_{o \in \mathcal{O}} \sum_{a \in \mathcal{A}_N} Q^\beta(o, a|v) f(\tilde{\pi}_{a,o}(v)) + Q^\beta(*|v) f(v).$$

(g) Se escolhermos a lista inicial v utilizando medida de probabilidade invariante $\tilde{\mu}^\beta$, a distribuição de probabilidade da cadeia permanecerá igual a $\tilde{\mu}^\beta$ em todos os instantes. Assim sendo, teremos a seguinte igualdade:

$$\sum_{v \in \tilde{\mathcal{S}}_N} \tilde{\mu}^\beta(v) f(v) = \sum_{v \in \tilde{\mathcal{S}}_N} \tilde{\mu}^\beta(v) \left(\sum_{o \in \mathcal{O}} \sum_{a \in \mathcal{A}_N} Q^\beta(o, a|v) f(\tilde{\pi}_{a,o}(v)) + Q^\beta(*|v) f(v) \right).$$

Verifique que essa igualdade pode ser reescrita como

$$0 = \sum_{v \in \tilde{\mathcal{S}}_N} \tilde{\mu}^\beta(v) \sum_{o \in \mathcal{O}} \sum_{a \in \mathcal{A}_N} Q^\beta(o, a|v)[f(\tilde{\pi}_{a,o}(v)) - f(v)].$$

Vamos supor agora que $f : \tilde{\mathcal{S}}_N \to \mathbb{R}$ seja assim definida:

$$f(v) = \sum_{a \in \mathcal{A}_N} v(A).$$

Verifique que nesse caso, temos a seguinte equação:

$$0 = \sum_{v \in \tilde{\mathcal{S}}_N} \tilde{\mu}^\beta(v) \sum_{o \in \mathcal{O}} \sum_{a \in \mathcal{A}_N} e^{\beta o v(a)} \left[o \sum_{b \neq a} \mathbf{1}\{|\tilde{\pi}_{a,o}(b)| \leq N\} - v(a) \right].$$