Gabarito - Questão Extra P1

a) $\theta = -\pi/3$: ângulo de rotação que leva da base canônica C para a base B.

Logo: $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = [I]^C_B$

E, no caso em que a matriz de mudança de base leva de base ortonormal em base ortonormal:

$$[I]^B_C = \left([I]^C_B\right)^{-1} = \left([I]^C_B\right)^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Desta forma, para $\theta = -\pi/3$:

$$[I]^C_B = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad e \quad [I]^B_C = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

b) $\vec{v}_C = (2,3) \longrightarrow \vec{v}_B = ?$

$$\vec{v}_B = [I]^C_B \, \vec{v}_C = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+3\sqrt{3})/2 \\ (-2\sqrt{3}+3)/2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \vec{v}_B = \left(\frac{2+3\sqrt{3}}{2}, \frac{-2\sqrt{3}+3}{2} \right)$$

$\vec{v}_B = (2,3) \longrightarrow \vec{v}_C = ?$

$$\vec{v}_C = [I]^B_C \, \vec{v}_B = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-3\sqrt{3})/2 \\ (2\sqrt{3}+3)/2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \vec{v}_C = \left(\frac{2-3\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}+3}{2} \right)$$

c) A base B pode ser obtida diretamente de $[I]^B_C$, pois:

$$[I]^B_C = \left[(\vec{v_1})_C \quad (\vec{v_2})_C \right] \quad , \quad B = \{ \vec{v_1} , \vec{v_2} \}$$

Portanto:

$$[I]^B_C = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \vec{v_1} & \vec{v_2} \end{array}$$

$$\therefore B = \left\{ \left(\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2} \right) , \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} , \frac{1}{2} \right) \right\}$$

O resultado é coerente?

De acordo com o Produto Interno Usual:

$$< \vec{v_1} , \vec{v_2} > = 0$$

$$< \vec{v_1} , \vec{v_1} > = < \vec{v_2} , \vec{v_2} > = 1$$

$\therefore$ A base B é ortonormal

→ O resultado é coerente, pois a matriz de rotação é uma matriz de mudança de base que leva uma base em outra a partir do giro de um ângulo em torno da origem do sistema, mantendo certas características da base original, como a ortonormalidade, que efetivamente é mantida.