Capítulo 7 - Forma Canônica de Jordan

27/11/2020

Slide 15 - Como determinar a matriz J ?

→ Será necessário analisar os possíveis casos para PM e PC, a partir da matriz A.

$A_{2\times 2}$

i) $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ∴ A diagonalizável

$\downarrow$

mg(·)

$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ $\quad \big(\dim(S_{\lambda_1}) = \dim(S_{\lambda_2}) = 1 \big)$

$\downarrow$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \longrightarrow 2 \text{ Blocos Jordan } \begin{cases} J^{(1)}_{1\times 1}, & \lambda_1 \\ J^{(2)}_{1\times 1}, & \lambda_2 \end{cases}$$

ii) $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$, $ma(\lambda_1) = 2$

Caso 1:

$m(x) = (x - \lambda_1)$

∴ A diagonalizável

$\downarrow$

$\dim(S_{\lambda_1}) = 2$ ∴ 2 Blocos Jordan associados a λ_1

$\downarrow$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Caso 2:

$m(x) = (x - \lambda_1)^2$

∴ A não diagonalizável

$\downarrow$ $mg(\lambda_1) < ma(\lambda_1)$

$\dim(S_{\lambda_1}) = 1$ ∴ 1 Bloco Jordan associado a λ_1

$\downarrow$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$A_{3\times3}$

i) $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ $\therefore$ A diagonalizável

$$m(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) \qquad (\dim(S_{\lambda_i}) = 1,\ i = 1,\dots,3)$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

3 Blocos Jordan: $J^{(i)}_{1\times1}$ associado a cada λ_i

ii) $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)^2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $ma(\lambda_2) = 2$

$m(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$

$\therefore$ A diagonalizável

$\dim(S_{\lambda_1}) = 1$ $\therefore$ 1 BJ para λ_1

$\dim(S_{\lambda_2}) = 2$ $\therefore$ 2 BJ para λ_2

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$m(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)^2$

$\therefore$ A não diagonalizável

$\dim(S_{\lambda_1}) = \dim(S_{\lambda_2}) = 1$

$\therefore$ 1 BJ associado a cada λ_i

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

iii) $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3$, $ma(\lambda_1) = 3$

$m(x) = (x - \lambda_1)$

∴ A diagonalizável

$\dim(S_{\lambda_1}) = 3$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$m(x) = (x - \lambda_1)^2$ ou $m(x) = (x - \lambda_1)^3$

∴ A não diagonalizável

$mg(\cdot) < ma(\cdot)$

$\dim(S_{\lambda_1}) = 1$ ---- n. Blocos Jordan associados a λ_1 ---- $2 = \dim(S_{\lambda_1})$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÕES :

(1) A quantidade de 1 que aparece em cada Bloco de Jordan indica o n. autovetores LI, associados a um autovalor, que faltaram para completar a base de autovetores.

Dada $A_{5\times5}$ tal que $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_2)^2$, então se:

(a) $\begin{cases} \dim(S_{\lambda_1}) = ma(\lambda_1) \\ \dim(S_{\lambda_2}) = ma(\lambda_2) \end{cases}$ ∴ A diagonalizável

(b) $\begin{cases} \dim(S_{\lambda_1}) < ma(\lambda_1) \\ \dim(S_{\lambda_2}) < ma(\lambda_2) \end{cases}$ ∴ A não diagonalizável

Aqui, faltarão autovetores LI associados a λ_1 e/ou λ_2 e quantos faltarem, será o n. vezes que 1 aparecerá em J.

(2) Para $A_{n\times n}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \sim J$ e J obtida de forma análoga à apresentada.

Slide 16 - Exemplo: Como calcular a matriz P?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

PC: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^4$

$\therefore \; ma(\lambda) = 4$

PM: $m(x) = (x-2)^3$ $\therefore$ A não diagonalizável

$m(x)$ implica $(A - 2I)^3 = O_{4\times 4}$

Um OL T pode ser representado como $A - \lambda I$. Desta forma:

$\dim(V) = \dim(N(A - \lambda I)) + \dim(Im(A - \lambda I))$ T

$\dim(N(A - \lambda I)) = \dim(S_\lambda)$

$\dim(Im(A - \lambda I)) = \text{posto}(A - \lambda I)$

n. máximo de linhas ou colunas LI da matriz $(A - \lambda I)$

Assim: $\dim(S_\lambda) = \dim(V) - \text{posto}(A - \lambda I)$

$$\lambda = 2 \;\therefore\; A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_1 = 3L_4 \rightarrow$ LD

L_2 LI

$L_3 \rightarrow$ LD

L_4 LI

$\therefore \; \text{posto}(A - 2I) = 2$

Logo:

$\dim(S_\lambda) = 4 - 2 = 2$. Portanto, $\exists\; \underline{2}$ BJ associados a $\lambda = 2$.

PERGUNTA

Como saber se as ordens dos BJ são $\begin{cases} J^{(1)}_{3\times3} \text{ e } J^{(2)}_{1\times1} \\ J^{(1)}_{2\times2} \text{ e } J^{(2)}_{2\times2} \end{cases}$???

RESPOSTA

A ordem dos BJ está associada com o PM e o índice de nilpotência de $(A-\lambda I)$: a ordem do maior BJ é definida pelo índice de nilpotência de $(A-\lambda I)$.

Uma matriz M quadrada, de ordem n, é chamada **NILPOTENTE** se $\exists\, r$, $r \in \mathbb{N}^*$, tal que:

$$M^r = 0_{n\times n}$$

r é o índice de nilpotência e é o menor entre os índices que anulam M.

Voltando ao PM:

$m(x) = (x-2)^3 \longrightarrow (A-2I)^3 = 0_{4\times4}$ $\therefore$ índice nilpotência $= 3$.

Isso significa que o <u>maior</u> bloco de Jordan associado a $\lambda = 2$ é 3×3. Portanto:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$J^{(1)}$ $\{$ bloco definido pelo índice de nilpotência.

$J^{(2)}$ $\{$ bloco que completa a matriz $J_{4\times4}$ e satisfaz $\dim(S_\lambda)$.

$T: V \longrightarrow V$, $\dim(V) = 4$, é um OL que representa A. Se $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$ for uma base de V tal que $[T]_E = J$, então:

$$J = \left([T(\vec{e_1})]_E \; [T(\vec{e_2})]_E \; [T(\vec{e_3})]_E \; [T(\vec{e_4})]_E \right) \therefore$$

$T(\vec{e_1}) = 2\vec{e_1} + \vec{e_2}$

$T(\vec{e_2}) = 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$

$T(\vec{e_3}) = 2\vec{e_3}$

$T(\vec{e_4}) = 2\vec{e_4}$

Mas $\boxed{T(\vec{e_i}) = A\vec{e_i}}$, então:

$$\boxed{\begin{aligned} T(\vec{e_1}) &= 2\vec{e_1} + \vec{e_2} \\ A\vec{e_1} - 2\vec{e_1} &= \vec{e_2} \\ (A - 2I)\vec{e_1} &= \vec{e_2} \end{aligned}}$$

T

$$\left.\begin{aligned} (A-2I)\vec{e_1} &= \vec{e_2} \\ (A-2I)\vec{e_2} &= \vec{e_3} \end{aligned}\right\} \quad \vec{e_1}, \vec{e_2} \notin N(A-2I)$$

$$\left.\begin{aligned} (A-2I)\vec{e_3} &= \vec{0} \\ (A-2I)\vec{e_4} &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \quad \vec{e_3}, \vec{e_4} \in N(A-2I)$$

$N(A-2I) = ?$ $\quad N(A-2I) = \{\vec{v} \in V \,/\, (A-2I)\vec{v} = \vec{0}\}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A-2I} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 3z = 0 \\ x + 3w = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = -3w \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \quad \vec{v} = (x, y, z, w) = (-3w, y, 0, w)$$

$$\vec{v} = w\underline{(-3, 0, 0, 1)} + y\underline{(0, 1, 0, 0)}$$

$$\therefore N(A-2I) = \{(-3w, y, 0, w),\ y, w \in \mathbb{R}\}$$

Assim:

$\vec{e_1} \notin N(A-2I) \longrightarrow \vec{e_1} = (0,0,1,0)$

$\vec{e_2} = (A-2I)\vec{e_1} \longrightarrow \vec{e_2} = (3,0,0,1)$ $\notin N(\cdot)$

$\vec{e_3} = (A-2I)\vec{e_2} \longrightarrow \vec{e_3} = (0,6,0,0)$ $\in N(\cdot)$

$\vec{e_4} \in N(A-2I) \longrightarrow \vec{e_4} = (-3,0,0,1)$ (LI com os outros $\vec{e_i}$)

$$\text{Logo: } P = [I]_C^E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_4}\}$$

$[\vec{e_1}]_C \quad [\vec{e_2}]_C \quad [\vec{e_3}]_C \quad [\vec{e_4}]_C$

VERIFICANDO SE P ESTÁ CORRETA

$A = PJP^{-1} \quad (A \sim J)$

$AP = PJ\underbrace{P^{-1}P}_{I}$

$\therefore$ Se $AP = PJ$, P está correta.

$$\longrightarrow AP = PJ = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ e P está correta!