



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

7. Forma Canônica de Jordan

LOB 1037 – Álgebra Linear
Profa. Paula C P M Pardal



1. Introdução

- ◆ Anteriormente, foram estudadas as situações em que um operador linear $T: V \rightarrow V$, definido em um espaço vetorial V de dimensão finita, é diagonalizável.
- ◆ No entanto, nem sempre a matriz A que representa esse operador é diagonalizável, ou seja, nem sempre existe uma base de autovetores B tal que a matriz A (ou $[T]_B$) do operador seja diagonal.
- ◆ Para várias aplicações, é suficiente que exista uma base E tal que a matriz A tenha uma forma bastante próxima da forma diagonal ➔ chamada *Forma de Jordan*.



2. Números Complexos

DEFINIÇÃO:

O conjunto dos números complexos pode ser definido como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi; a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$$

em que i é a solução da equação $x^2 + 1 = 0$. Como não existe n. real que satisfaça essa equação, i é chamado *número imaginário*. Para um número complexo z : a é chamado de parte real ($\text{Re}(z) = a$) e b , de parte imaginária ($\text{Im}(z) = b$).

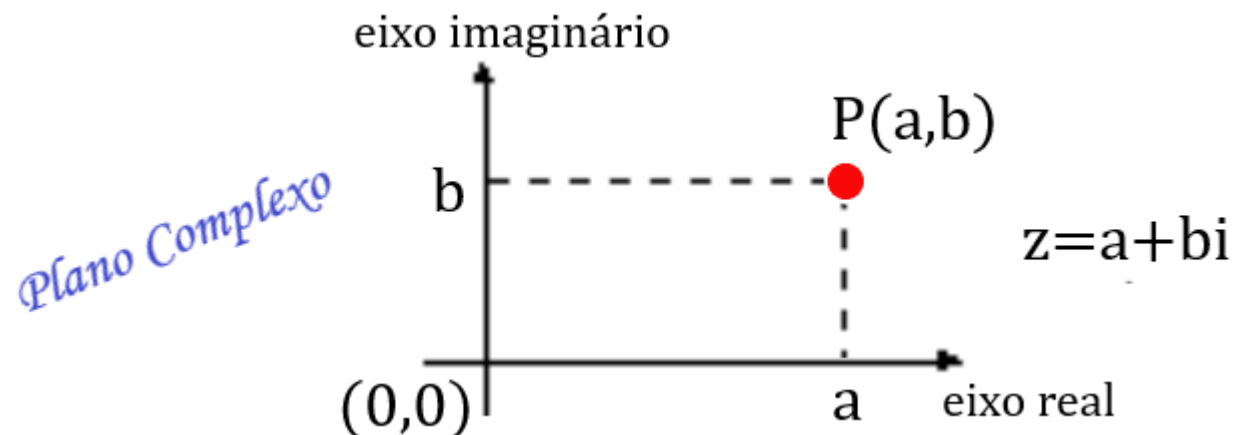
O conjunto dos números complexos pode ser definido como uma extensão dos n. reais → números complexos podem ser somados, subtraídos, multiplicados e divididos.



Observações:

- i. O complexo z é um *número real* se e somente se $\text{Im}(z) = 0$.
- ii. O complexo z é um *número imaginário puro* se e somente se $\begin{cases} \text{Re}(z) = 0 \\ \text{Im}(z) \neq 0 \end{cases}$.
- iii. O complexo z é *nulo* se e somente se $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = 0$.

Representação Geométrica:





Igualdade de N. Complexos:

- ◆ Dados $z = a + bi$ e $w = c + di$: $z = w \Leftrightarrow a = c ; b = d$.

Simétrico de um N. Complexo:

- ◆ Dado $z = a + bi$, seu **simétrico** é o número: $-z = -(a + bi) = -a - bi$.

Conjugado de um N. Complexo:

- ◆ Dado $z = a + bi$, seu **conjugado** é denotado por: $\bar{z} = a - bi$.



Operações com N. Complexos:

Considere $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- ♦ Adição: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.
- ♦ Subtração: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i$.
- ♦ Multiplicação: $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- ♦ Divisão:

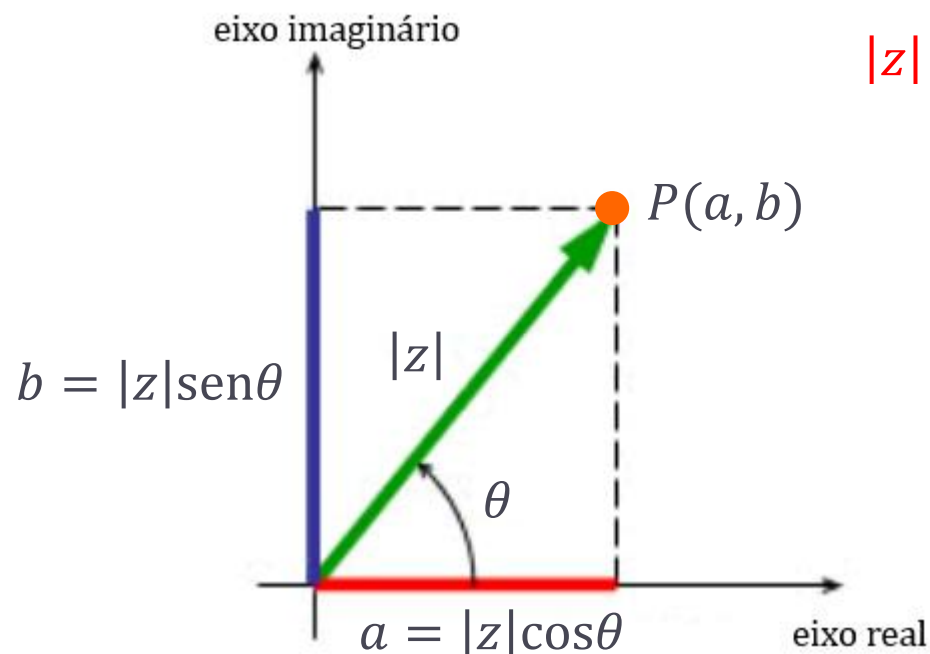
➔ Dado $z = a + bi$, não nulo, seu **inverso** é o número: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ ➔

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}, \text{ com } z_2 \text{ não nulo.}$$



Módulo de um N. Complexo:

- ◆ Dado $z = a + bi$, o **módulo** de z , representado por $|z|$, é a distância do ponto $P(a, b)$ à origem do plano complexo:



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Representação Polar ou Trigonométrica:

♦ Dado $z = a + bi \rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, com $\begin{cases} r = |z| \\ \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$

Fórmula de Euler:

- ♦ Mostra a seguinte relação entre funções trigonométricas e a função exponencial:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$



3. Operadores Nilpotentes

DEFINIÇÃO:

Um operador linear $T: V \rightarrow V$ (cuja matriz A do OL é quadrada de ordem n) é dito **nilpotente** se existir $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $T^k = 0$ ($A^k = 0$).

➔ O *índice de nilpotência* é o menor valor de k tal que $A^k = 0$.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$ é uma matriz nilpotente de índice n .



TEOREMA (1):

Se $T: V \rightarrow V$, $\dim(V) = n$, é um operador nilpotente de **índice n** , então existe uma base $E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ tal que:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observação: Como T é nilpotente de índice n , então existe $\vec{v} \in V$ tal que $E = \{\vec{v}, T(\vec{v}), T^2(\vec{v}), \dots, T^{n-1}(\vec{v})\}$ é uma base de V .



4. Forma Canônica de Jordan

DEFINIÇÃO (i): *Bloco de Jordan*

Um bloco de Jordan é uma matriz quadrada de ordem n , triangular inferior, em que:

- ◆ Os elementos da diagonal principal são todos iguais;
- ◆ Os elementos imediatamente abaixo dessa diagonal são todos iguais a 1;
- ◆ Os demais elementos são todos nulos.

Exemplo: $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n}$



DEFINIÇÃO (ii): Matriz na Forma de Jordan

Uma matriz está na forma canônica de Jordan se ela é *triangular inferior*, com blocos de Jordan ao longo da diagonal principal e os demais elementos todos nulos.

Exemplo:
$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}^{(1)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathcal{J}^{(k)} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

→ Cada $\mathcal{J}^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{m \times m}, i = 1, \dots, k; m \leq n$, é um bloco de Jordan.



EXEMPLOS

São matrizes na Forma de Jordan:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}; \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Não são matrizes na Forma de Jordan:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$



TEOREMA (2):

Toda matriz $A_{n \times n}$ é **semelhante** a uma matriz na Forma de Jordan. Ou seja: existe uma matriz P , inversível, tal que $A = PJP^{-1}$, em que J é uma matriz na forma de Jordan.

Objetivo: A partir de uma matriz conhecida $A_{n \times n}$, determinar as matrizes P e J que satisfazem $A = PJP^{-1}$.

TEOREMA (3):

Se $p(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} (x - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (x - \lambda_k)^{\alpha_k}$ é o **polinômio característico** da matriz A , então $m_g(\lambda_i)$ (ou $\dim(S_{\lambda_i})$) corresponde ao número de blocos de Jordan relativos ao autovalor λ_i .



Como determinar a matriz J ?

Matrizes $A_{2 \times 2}$: Analisar os possíveis polinômios mínimo e característico.

- i. $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2), \lambda_1 \neq \lambda_2$
- ii. $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$

Matrizes $A_{3 \times 3}$: Analisar os possíveis polinômios mínimo e característico.

- i. $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3), \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$
- ii. $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2, \lambda_1 \neq \lambda_2$
- iii. $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3$

➔ Para matrizes de ordem n , com *autovalores reais*, A será semelhante a uma matriz J , obtida de forma análoga às apresentadas.



Como determinar a matriz P ?

EXEMPLO

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, encontre as matrizes J e P tais que $A = PJP^{-1}$.



5. Aplicações da Forma de Jordan

DEFINIÇÃO: *Exponencial Matricial*

Seja $f(x) = e^x$ a função exponencial → a expansão em série de Taylor da exponencial é $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Se A é uma matriz $n \times n$, define-se por *exponencial matricial* a seguinte expansão em série:

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Como resolver EDOs quando a matriz A não é diagonalizável?



TEOREMA (4):

Se W é o espaço vetorial das soluções de uma EDO homogênea, então existe uma base composta pelas soluções independentes da forma de Jordan.

Implicação:

Se $\dot{F}(t) = AF(t)$, $F(0) = F_0$ e $F(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$, então $F(t) = e^{At}F_0 = Pe^{Jt}P^{-1}F_0$, com $A \sim J$.

Observação: Se A é diagonalizável $\therefore A \sim D$ e $F_i(t) = \vec{v}_i e^{\lambda_i t}$.



EXERCÍCIOS

1. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, encontre as matrizes J e P tais que $A = PJP^{-1}$.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Encontre a solução geral do sistema: $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ \dot{y} = \beta y \end{cases}$.

$$F(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha t} \\ c_2 e^{\beta t} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3. Encontre a solução geral do sistema: $\begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \dot{y} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y \end{cases}$.

$$F(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-\frac{\sqrt{10}}{2}t} + c_2 e^{\frac{\sqrt{10}}{2}t} \\ c_1 e^{-\frac{\sqrt{10}}{2}t} - c_2 e^{\frac{\sqrt{10}}{2}t} \end{pmatrix}$$



4. Encontre a solução do PVI: $\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$, com $x(0) = 1; y(0) = 2$.

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ te^{2t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

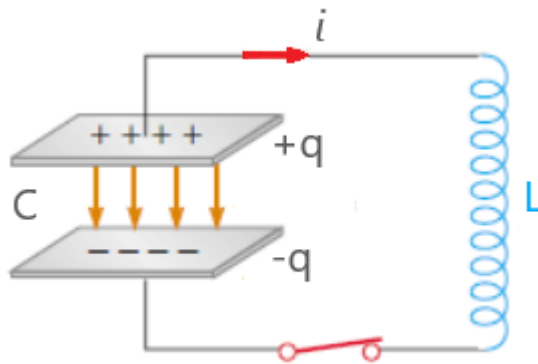
5. Encontre a solução do PVI: $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -x + 3y \end{cases}$, com $x(0) = 1; y(0) = 2$.

$$F(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} + e^{2t} \\ te^{2t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

6. Encontre a solução geral do sistema: $\begin{cases} \dot{x} = -9x + 19y + 4z \\ \dot{y} = -3x + 7y + z \\ \dot{z} = -7x + 17y + 2z \end{cases}$.



7. Em um **circuito LC**, um indutor de indutância L está ligado em série com um capacitor de capacitância C . Sejam: i a corrente elétrica que circula no circuito; e q a carga no capacitor. Sabe-se que a diferença de potencial no indutor é $L \frac{di}{dt}$ e no capacitor, $\frac{q}{C}$. Inicialmente, a corrente no circuito é i_0 e a carga no capacitor, q_0 . Encontre as expressões para carga e corrente em função do tempo, $q(t)$ e $i(t)$, respectivamente.



$$\begin{cases} i(t) = q_0 b \sin(bt) + i_0 b \cos(bt) \\ q(t) = q_0 \cos(bt) + \frac{i_0}{b} \sin(bt) \end{cases}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$



8. Considere o oscilador harmônico descrito por um corpo rígido de massa m , preso a uma mola cuja constante de elasticidade é k ($k > 0$). Suponha que não haja atrito e que a massa da mola seja desprezível em relação a m . Sejam: u o deslocamento do corpo e v , sua velocidade. Inicialmente, no instante $t = 0$, o corpo encontra-se deslocado de u_0 e em repouso. Encontre as expressões para velocidade e posição em função do tempo, $v(t)$ e $u(t)$, respectivamente.

