ANOVA
Modelos de Efeitos Fixos e Aleatórios

Modelos mais Gerais

(Neter et al. 2005; Oehlert, 2010)

Diferentes estruturas para os componente “FIXOS” e “ALEATÓRIOS” do modelo adotado para Y:

$$\mathbf{Y = \boxed{E[Y|X]} + \boxed{[\,Y - E(Y|X)]}}$$

componente fixo do modelo

componente aleatório do modelo

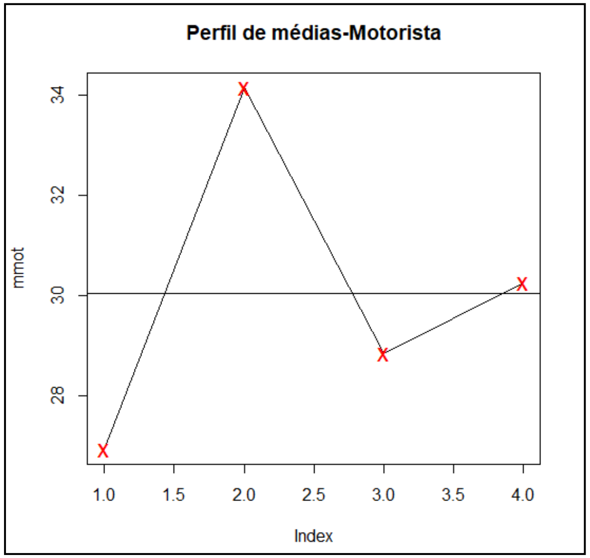
Modelo com Dois Fatores Aleatórios

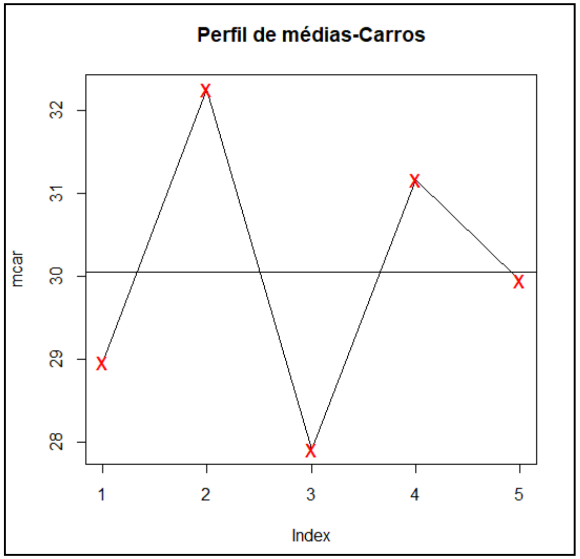
Consumo de Gasolina de acordo com carros e motoristas amostrados aleatoriamente de uma indústria automobilística

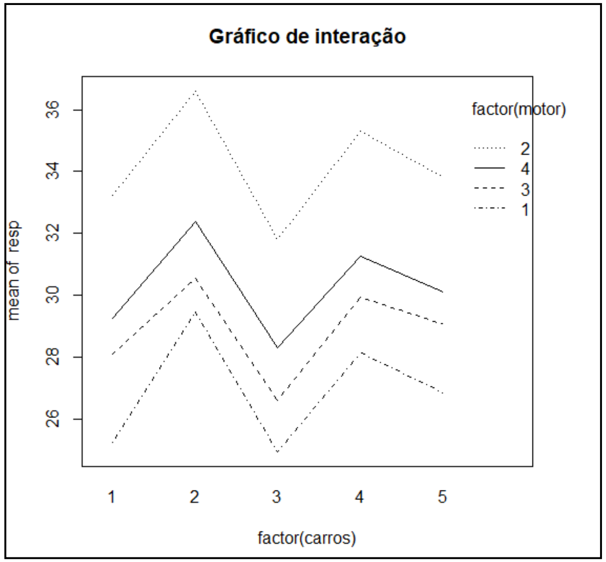
Fator B: Motoristas	Fator A: Carros				
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
$i = 1$	25.3	28.9	24.8	28.4	27.1
	25.2	30.0	25.1	27.9	26.6
$i = 2$	33.6	36.7	31.7	35.6	33.7
	32.9	36.5	31.9	35.0	33.9
$i = 3$	27.7	30.7	26.9	29.7	29.2
	28.5	30.4	26.3	30.2	28.9
$i = 4$	29.2	32.4	27.7	31.8	30.3
	29.3	32.4	28.9	30.7	29.9

Os fatores Carros e Motoristas são aleatórios.
A resposta sob estudo é o consumo de combustível.

Modelo com Dois Fatores Aleatórios







Componentes da variabilidade de Y devido ao efeito (aleatório) principal de cada fator bem como de sua interação.

Modelo com Dois Fatores Aleatórios

Componente fixo — Componente aleatório

$$y_{ijk} = \mu_{jk} + e_{ijk} = \boxed{\mu} + \boxed{\tau_j + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}}; \quad i = 1, \ldots, n_{jk}; \; j = 1, \ldots, a; k = 1, \ldots, b$$

$$\tau_j \sim N\left(0\,;\sigma_A^2\right); \quad \beta_k \sim N\left(0\,;\sigma_B^2\right); \quad \gamma_{jk} \sim N\left(0\,;\sigma_{AB}^2\right);$$

$$e_{ijk} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right); \quad \tau_j \perp \beta_k \perp \gamma_{jk} \perp e_{ijk}$$

$$y_{ijk} \sim N\left(\mu\,;\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$Cov\left(y_{ijk}; y_{i'j'k'}\right) = \begin{cases} \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2 & i = i'; j = j'; k = k' \\ \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 & i \neq i'; j = j'; k = k' \\ \sigma_A^2 & i \neq i'; j = j'; k \neq k' \\ \sigma_B^2 & i \neq i'; j \neq j'; k = k' \\ 0 & i \neq i'; j \neq j'; k \neq k' \end{cases}$$

Modelos Lineares de Efeitos Aleatórios

ANOVA para Delineamentos com Dois Fatores, A e B, Aleatórios

FV	#g.l.	E(QM)
A	a - 1	$\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2 + rb\sigma_A^2$
B	b - 1	$\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2 + ra\sigma_B^2$
AB	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2$
Resíduo	n-ab=ab$(r-1)$	σ_e^2

r: réplicas n=abr

Neter et al., 2005

Estrutura Fatorial dos efeitos aleatórios

$$H_0 : \sigma_{AB}^2 = 0 \Rightarrow F_{AB} = \frac{QM(AB)}{QM\,\mathrm{Re}s} \sim F_{(a-1)(b-1),ab(r-1)}$$

$$H_0 : \sigma_A^2 = 0 \Rightarrow F_A = \frac{QMA}{QM(AB)} \sim F_{(a-1),(a-1)(b-1)}$$

$$H_0 : \sigma_B^2 = 0 \Rightarrow F_B = \frac{QMB}{QM(AB)} \sim F_{(b-1),(a-1)(b-1)}$$

Tabela de ANOVA equivalente ao modelo de efeitos Fixos, exceto o E(QM).
Não há uma ordem para a realização dos testes dos components de variância!

Modelo com Dois Fatores Aleatórios
Estimadores dos Componentes de Variância

$$\sigma_A^2 = \frac{E(QMA) - E(QMAB)}{rb} \Rightarrow \hat{\sigma}_A^2 = \frac{QMA - QMAB}{rb}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{E(QMB) - E(QMAB)}{ra} \Rightarrow \hat{\sigma}_B^2 = \frac{QMB - QMAB}{ra}$$

$$\sigma_{AB}^2 = \frac{E(QMAB) - E(QM\,\mathrm{Re}\,s)}{r} \Rightarrow \hat{\sigma}_{AB}^2 = \frac{QMAB - QM\,\mathrm{Re}\,s}{r}$$

$$\sigma_e^2 = E(QM\,\mathrm{Re}\,s) \Rightarrow \hat{\sigma}_e^2 = QM\,\mathrm{Re}\,s$$

Intervalos de Confiança aproximados para Componentes de Variância em modelos balanceados podem ser obtidos por meio do procedimento de Satterthwaite que identifica os estimadores desses CV como combinações lineares de Quadrados Médios.

Modelo com 2 Fatores Aleatórios
Estimador da Média Geral

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{...}$$

$$Var(\hat{\mu}) = Var\left(\frac{\sum_{ijk} y_{ijk}}{rab}\right) = \frac{rb\sigma_A^2 + ra\sigma_B^2 + r\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2}{rab}$$

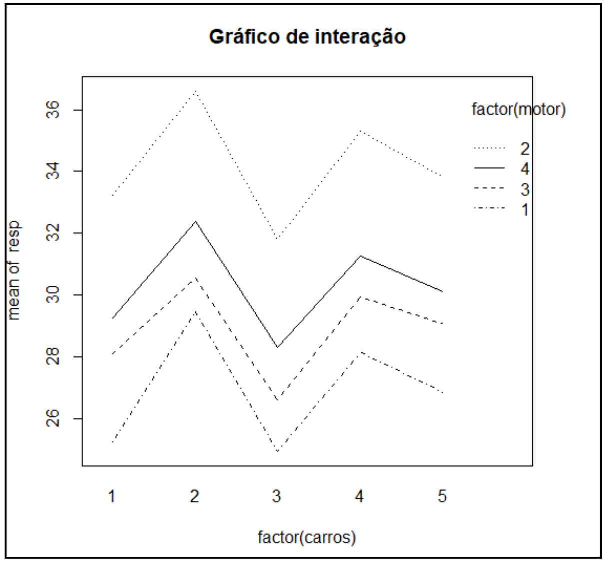
$$= \frac{E(QMA) + E(QMB) - E(QMAB)}{rab}$$

$$\hat{V}ar(\hat{\mu}) == \frac{QMA + QMB - QMAB}{rab}$$

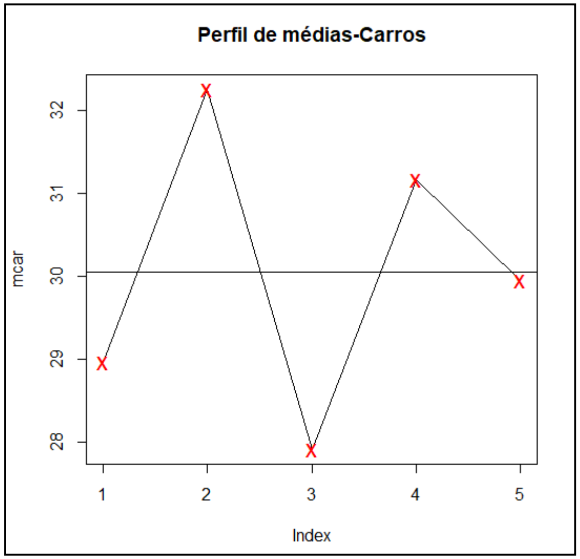
Modelo com Dois Fatores Aleatórios

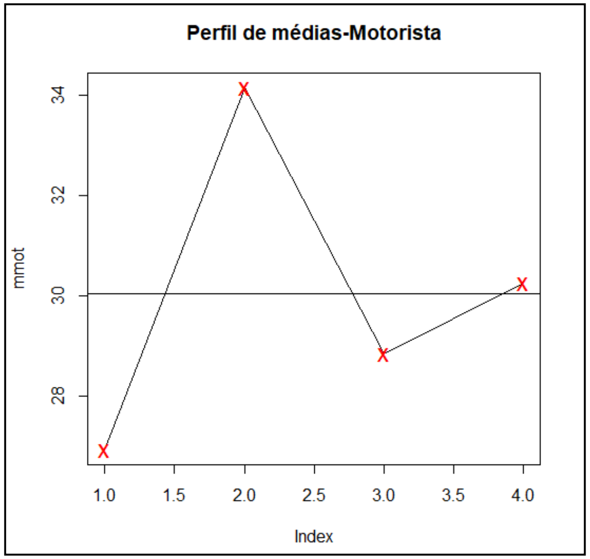
Fator B: Motoristas	Fator A: Carros				
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$i=1$	25.3 25.2	28.9 30.0	24.8 25.1	28.4 27.9	27.1 26.6
$i=2$	33.6 32.9	36.7 36.5	31.7 31.9	35.6 35.0	33.7 33.9
$i=3$	27.7 28.5	30.7 30.4	26.9 26.3	29.7 30.2	29.2 28.9
$i=4$	29.2 29.3	32.4 32.4	27.7 28.9	31.8 30.7	30.3 29.9

$\sigma^2_{AB} \Leftarrow$



$\sigma^2_{A} \Leftarrow$





$\Rightarrow \sigma^2_{B}$

Modelo com Dois Fatores Aleatórios

Fator B: Motoristas	Fator A: Carros				
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$i=1$	25.3	28.9	24.8	28.4	27.1
	25.2	30.0	25.1	27.9	26.6
$i=2$	33.6	36.7	31.7	35.6	33.7
	32.9	36.5	31.9	35.0	33.9
$i=3$	27.7	30.7	26.9	29.7	29.2
	28.5	30.4	26.3	30.2	28.9
$i=4$	29.2	32.4	27.7	31.8	30.3
	29.3	32.4	28.9	30.7	29.9

r=2, a=5, b=4
n=40

Tabela de ANOVA: Modelo com 2 Fatores Aleatórios

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value
Carros (A: aleatório0	4	94.713	23.678	23.678/0.204=116.07
Motorista (B: aleatório)	3	280.285	93.428	93.428/0.204=457.98
Carros*Motorista	12	2.446	0.204	0.204/0.176=1.159
Residuals	20	3.515	0.176	

Significância dos Componentes de variância (CV)

CV	Estimativa	vapor-p	valor-p ajustado.fdr
Fator A	2.934	1.745695e-09	5.237085e-09*
Fator B	9.322	1.226574e-12	3.679723e-12*
Fator AB	0.014	3.714839e-01	1.000000e+00

Rejeitar $\sigma_A^2 = 0$
Rejeitar $\sigma_B^2 = 0$
Não Rejeitar $\sigma_{AB}^2 = 0$

$\hat{\mu} = 30.05 \qquad dp\left(\hat{\mu}\right) = 1.7096$

Modelo com Três Fatores Aleatórios

Quadrado Médio Esperado

Source	EMS
A	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nc\sigma^2_{\alpha\beta} + nb\sigma^2_{\alpha\gamma} + nbc\sigma^2_{\alpha}$
B	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nc\sigma^2_{\alpha\beta} + na\sigma^2_{\beta\gamma} + nac\sigma^2_{\beta}$
C	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nb\sigma^2_{\alpha\gamma} + na\sigma^2_{\beta\gamma} + nab\sigma^2_{\gamma}$
AB	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nc\sigma^2_{\alpha\beta}$
AC	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nb\sigma^2_{\alpha\gamma}$
BC	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + na\sigma^2_{\beta\gamma}$
ABC	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
Error	σ^2

Há Testes F exatos para testar os efeitos aleatórios ABC, AB, AC e BC. MAS não há testes exatos para testar os Efeitos Principais A, B e C. Testes aproximados precisam ser obtidos no caso de modelos com 3 ou mais fatores aletórios.

Modelo Misto: Um Fator Fixo e Um Fator Aleatório

A eficiência de três Métodos de Ensino (I, II e III) foi avaliada por meio do desempenho do aluno. Cinco instrutores habilitados a conduzir tais Métodos foram aleatoriamente escolhidos de um cadastro para fazerem parte do estudo. Quinze grupos de quatro alunos considerados homogêneos segundo o conhecimento do assunto foram então

Método de Ensino	**I**				**II**				**III**			
Instr. 1	65	68	56	45	74	69	52	73	69	63	81	67
Instr. 2	58	62	65	56	81	76	56	78	83	70	72	79
Instr. 3	63	75	58	54	76	80	62	83	74	72	73	73
Instr. 4	57	64	70	48	80	78	58	75	78	68	76	77
Instr. 5	66	70	64	60	68	73	51	76	80	75	70	71

Considere a análise destes dados: há diferença no desempenho esperados dos alunos de acordo com os três Métodos de Ensino?
Método de Ensino deve ser modelado como Fator Fixo ou Alea’torio? E Instrutor?

Proponha outras situações experimentais em que um modelo misto desse tipo seria útil.

Modelo Misto

Componente fixo

Componente aleatório

$$y_{ijk} = \mu_{jk} + e_{ijk} = \boxed{\mu + \tau_j} + \boxed{\beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk};} \quad i = 1,\ldots,n_{jk};\ j = 1,\ldots,a;\ k = 1,\ldots,b$$

$$\sum_{j=1}^{a} \tau_j = 0; \qquad \beta_k \sim N\left(0\,;\sigma_B^2\right);$$

Formulação restrita do modelo misto

$$\gamma_{jk} \sim N\left(0\,;\frac{a-1}{a}\sigma_{AB}^2\right); \quad \boxed{\sum_{j=1}^{a} \gamma_{jk} = 0\,;} \quad Cov\left(\gamma_{jk};\gamma_{j'k}\right) = -\frac{1}{a}\sigma_{AB}^2 \qquad j \neq j'$$

$$e_{ijk} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right); \quad \beta_k \perp \gamma_{jk} \perp e_{ijk}$$

$$y_{ijk} \sim N\left(\mu + \tau_i\,;\sigma_B^2 + \frac{a-1}{a}\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$Cov\left(y_{ijk};y_{i'j'k'}\right) = \begin{cases} \sigma_B^2 + \dfrac{a-1}{a}\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2 & i = i' \\ \sigma_B^2 + \dfrac{a-1}{a}\sigma_{AB}^2 & i \neq i', j = j'; k = k' \\ \sigma_B^2 - \dfrac{1}{a}\sigma_{AB}^2 & i \neq i', j \neq j'; k = k' \\ 0 & k \neq k' \end{cases}$$

Modelos Lineares Mistos

Delineamentos com Dois Fatores Cruzados AxB: A de Efeito Fixo e B de Efeito Aleatório

FV	#g.l.	E(QM)
A	$a-1$	$\sigma_e^2 + rb\dfrac{\sum_j \tau_j^2}{a-1} + r\sigma_{AB}^2$
B	$b-1$	$\sigma_e^2 + ra\sigma_B^2$
AB	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2$
Resíduo	n-ab=ab$(r-1)$	σ_e^2

Neter et al., 2005

SQ, QM e número de g.l. são calculados como no caso de um modelo ANOVA de efeitos fixos. O denominador da estatística F mudará de acordo com o valor esperado do QM, isto é, E(QM).

Modelo Linear Misto

Tabela de ANOVA - Modelo Misto

	Df	Sum Sq	Mean Sq	**F value**	
Método (A:Fixo)	2	1695.63	847.82	FA: 847.82/27.75=30.55	<0.001*
Instrutor (B:Aleatório)	4	190.57	47.64	FB: 47.64/66.50= 0.72	0.5851
Método*Instrutor(AB:Aleat)	8	222.03	27.75	FAB: 27.75/66.50=0.42	0.9045
Residuals	45	2992.50	66.50		

$$H_{0AB}:\sigma_{AB}^2=0 \quad \Rightarrow F_{AB}=\frac{QM(AB)}{QM\,Res}\sim F_{8,45}$$

Método de Ensino e Instrutor não interagem

$$H_{0B}:\sigma_{B}^2=0 \quad \Rightarrow F_{B}=\frac{QM(B)}{QM\,Res}\sim F_{4,45}$$

A variabilidade entre instrutores não é significante

$$H_{0A}:\tau_{j}=0 \quad \Rightarrow F_{A}=\frac{QM(A)}{QM(AB)}\sim F_{2,4}$$

Há (pelo menos uma) diferença significante entre o desempenho esperado dos alunos de acordo com Método de Ensino

Modelo Linear Misto

$$y_{ijk} = \mu_{jk} + e_{ijk} = \boxed{\mu + \tau_j} + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}; \quad i = 1,\ldots,r;\ j = 1,\ldots,a; k = 1,\ldots,b$$

$$\mu_j \qquad \sum_{j=1}^{a} \tau_j = 0$$

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{\ldots} \qquad \hat{\tau}_j = \hat{\mu}_j - \hat{\mu} = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{\ldots}$$

$$Var\left(\hat{\tau}_j\right) = \frac{\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2}{br} = \frac{E\left(QMAB\right)}{br} \Rightarrow \hat{V}ar\left(\hat{\tau}_j\right) = \frac{QMAB}{br}$$

$$H_0 : \tau_j = 0; \qquad \frac{\hat{\tau}_j}{\sqrt{\hat{V}ar\left(\hat{\tau}_j\right)}} \sim t_{(a-1)(b-1)}$$

Modelo Linear Misto

$$y_{ijk} = \mu_{jk} + e_{ijk} = \mu + \tau_j + \boxed{\beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk};}$$

$$\sigma_B^2; \quad \sigma_{AB}^2; \quad \sigma_e^2$$

$$\sigma_B^2 = \frac{E(QMB) - E(QM\,\mathrm{Re}\,s)}{ra} \Rightarrow \hat{\sigma}_B^2 = \frac{QMB - QM\,\mathrm{Re}\,s}{ra}$$

$$\sigma_{AB}^2 = \frac{E(QMAB) - E(QM\,\mathrm{Re}\,s)}{r} \Rightarrow \hat{\sigma}_{AB}^2 = \frac{QMAB - QM\,\mathrm{Re}\,s}{r}$$

$$\sigma_e^2 = E(QM\,\mathrm{Re}\,s) \Rightarrow \hat{\sigma}_e^2 = QM\,\mathrm{Re}\,s$$

Intervalos de Confiança aproximados para Componentes de Variância em modelos balanceados podem ser obtidos por meio do procedimento de Satterthwaite que identifica os estimadores desses CV como combinações lineares de Quadrados Médios.

Modelo Linear Misto

Tabela de ANOVA – Modelo Misto

	Df	Sum Sq	Mean Sq	**F value**	
Método (A:Fixo)	2	1695.63	847.82	FA: 847.82/27.75=30.55	<0.001*
Instrutor (B:Aleatório)	4	190.57	47.64	FB: 47.64/66.50= 0.72	0.5851
Método*Instrutor(AB:Aleat)	8	222.03	27.75	FAB: 27.75/66.50=0.42	0.9045
Residuals	45	2992.50	66.50		

Médias por Método de Ensino

1	2	3	
61.20	70.95	73.55	68.57

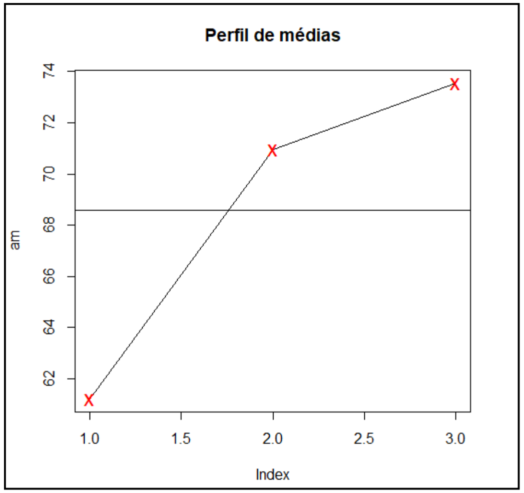
$$\hat{\tau}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$$

$$\hat{V}ar\left(\hat{\tau}_j\right) = \frac{27.75}{5*4} = 1,388$$

$$\hat{\tau}_1 = -7,37 \quad t_1 = -6,26$$

$$\hat{\tau}_2 = -7,37 \quad t_2 = 2,02$$

$$\hat{\tau}_3 = -7,37 \quad t_3 = 4,22$$



Valor-p ajustado	1	2	3
Bonferroni	0.0007343535	0.2330218528	0.0086255918
FDR	0.0007343535	0.0776739509	0.0043127959

Conclusão sobre o efeito de Método de Ensino?

Modelo Linear Misto

Tabela de ANOVA - Modelo Misto

```
                              Df  Sum Sq Mean Sq   F value
Método (A:Fixo)                2 1695.63  847.82   FA: 847.82/27.75=30.55 <0.001*
Instrutor (B:Aleatório)        4  190.57   47.64   FB:  47.64/66.50= 0.72 0.5851
Método*Instrutor(AB:Aleat) 8  222.03   27.75   FAB: 27.75/66.50=0.42  0.9045
Residuals                     45 2992.50   66.50
```

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{QMB - QM\,\mathrm{Re}\,s}{ra} = -1,57$$

$$\hat{\sigma}_{AB}^2 = \frac{QMAB - QM\,\mathrm{Re}\,s}{r} = -9.69$$

Não significantes. Podem ser considerados nulos.

$$\hat{\sigma}_e^2 = QM\,\mathrm{Re}\,s = 66.5$$

Modelos Lineares Mistos

Delineamentos com Dois Fatores

Expected Mean Squares for Balanced Two-Factor ANOVA Models.

Mean Square	df	Fixed ANOVA Model (A and B fixed)	Random ANOVA Model (A and B random)	Mixed ANOVA Model (A fixed, B random)
MSA	$a-1$	$\sigma^2 + nb\frac{\sum \alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + nb\sigma_\alpha^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + nb\frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
MSB	$b-1$	$\sigma^2 + na\frac{\sum \beta_j^2}{b-1}$	$\sigma^2 + na\sigma_\beta^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + na\sigma_\beta^2$
$MSAB$	$(a-1)(b-1)$	$\sigma^2 + n\frac{\sum\sum(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
MSE	$(n-1)ab$	σ^2	σ^2	σ^2

n: número de réplicas

Neter et al., 2005

Modelo Misto: Um Fator Fixo e Um Fator Aleatório

Um nutricionista está interessado no consumo de 5 tipos de Menus. Restaurantes foram amostrados de um município e o consumo dos Menus (número de pedidos) foi avaliado.

	Tipo de Menu				
Restaurante	1	2	3	4	5
1	11	13	10	18	15
2	20	28	15	30	18
3	8	10	8	16	12
4	30	35	27	41	28
5	14	16	13	22	16
6	25	27	26	33	25
7	43	46	41	55	42
8	13	14	12	20	13

Considere a análise destes dados supondo que existe correlação entre pedidos feitos em um mesmo restaurante.

Modelagem: Tipo de Menu como Fator Fixo e Restaurante como Fator Aleatório.
Como fica definida a estrutura de correlação entre as observações?
Qual é a diferença dos modelos se Restaurante for assumido como Fator Bloco?

Modelo Linear Misto – Formulação Matricial

$$y_{ijk} = \mu + \tau_j + u_{1k} + u_{2jk} + e_{ijk}$$

$$\sum_j \tau_j = 0,$$

Formulação com restrição

$$u_{1k} \sim N\left(0;\sigma_1^2\right),\ u_{2jk} \sim N\left(0;\sigma_{12}^2\right),\ \boxed{\sum_j u_{2jk} = 0}$$

$$e_{ijk} \sim N\left(0;\sigma_e^2\right),\quad u_{1k} \perp u_{2jk} \perp e_{ijk}$$

$$y_{ijk} \sim N\left(\mu + \tau_i\ ; \sigma_1^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_e^2\right) \quad Cov\left(y_{ijk}; y_{i'j'k'}\right) = \begin{cases} \sigma_1^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_e^2 & i = i' \\ \sigma_1^2 + \sigma_{12}^2 & i \neq i', j = j'; k = k' \\ \sigma_1^2 - \sigma_{12}^2 & i \neq i', j \neq j'; k = k' \\ 0 & k \neq k' \end{cases}$$

$$Y_{n\times 1} = X_{n\times p}\beta_{p\times 1} + Z_{n\times q}u_{q\times 1} + e_{n\times 1}$$

$$E\left(Y\right) = X\beta$$

$$Cov\left(Y\right) = Z'\Delta Z + \Sigma$$

Modelo Linear Misto – Formulação Matricial

$$Y_{n\times 1} = X_{n\times p}\beta_{p\times 1} + Z_{n\times q}u_{q\times 1} + e_{n\times 1}$$

$$E(Y) = X\beta$$

$$Cov(Y) = Z'\Delta Z + \Sigma$$

Delineamento Fatorial 2x2 com r=2 replicas, fator A fixo e fator B aleatório

i=1,2
j=1,2
k=1,2

$$Y_{8\times 1} = \begin{pmatrix} y_{111} \\ y_{211} \\ y_{121} \\ y_{221} \\ y_{112} \\ y_{212} \\ y_{122} \\ y_{222} \end{pmatrix} Y_{n\times 1}, \quad X_{8\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_{2\times 1} = \begin{pmatrix} \mu \\ \tau_1 \end{pmatrix}, \quad Z_{8\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad u_{4\times 1} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{211} \\ u_{212} \end{pmatrix}$$

$$Cov(Y)_{8\times 8} = Z'\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{12}^2 \end{pmatrix} Z + I_8\sigma_e^2$$

Delineamentos SpliPlot

Parcela subdividida

Em muitas situações, os tratamentos em estrutura fatorial podem ser alocados em configurações de blocagem e unidades experimentais que levam à ideia de dois ou mais tamanhos de unidades experimentais no mesmo delineamento.

Isso ocorre devido a restrições práticas, de forma que para aplicar os níveis de alguns fatores é necessário o uso de parcelas "grandes" enquanto que os níveis dos outros fatores podem ser aplicados em parcelas "menores" ⇒ restrição na aleatorização.

Qual é a definição de uma unidade experimental?

Exemplo (Agronomia): avaliar os efeitos de 4 variedades e 3 níveis de irrigação na produção de feijão. Plantas de uma variedade podem ser alocadas em canteiros não muito grandes, ou até mesmo em vasos. Mas na irrigação, a área irrigada, fixando um dos níveis desejados deste fator, deve ser bem maior.

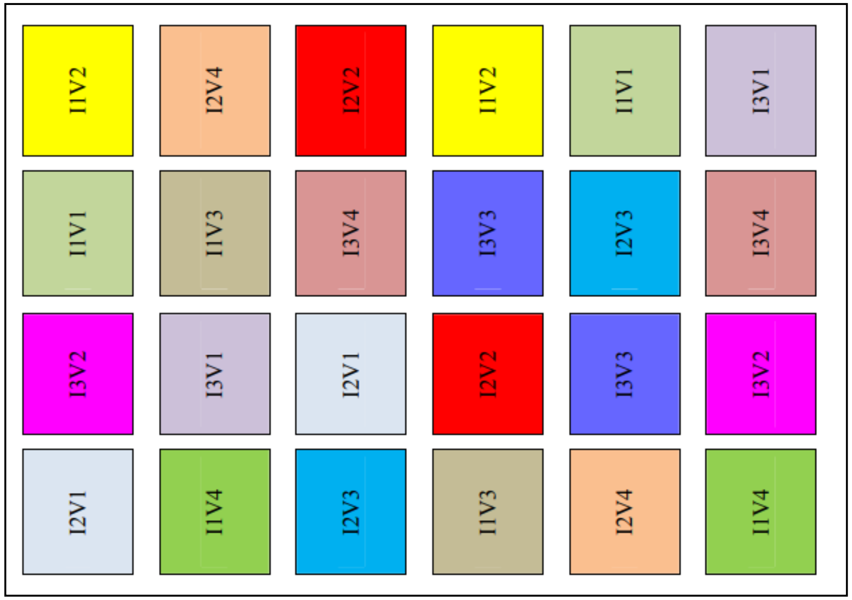
Fatorial 4x3

Como deve ser particionada a área do estudo?

Delineamentos SpliPlot

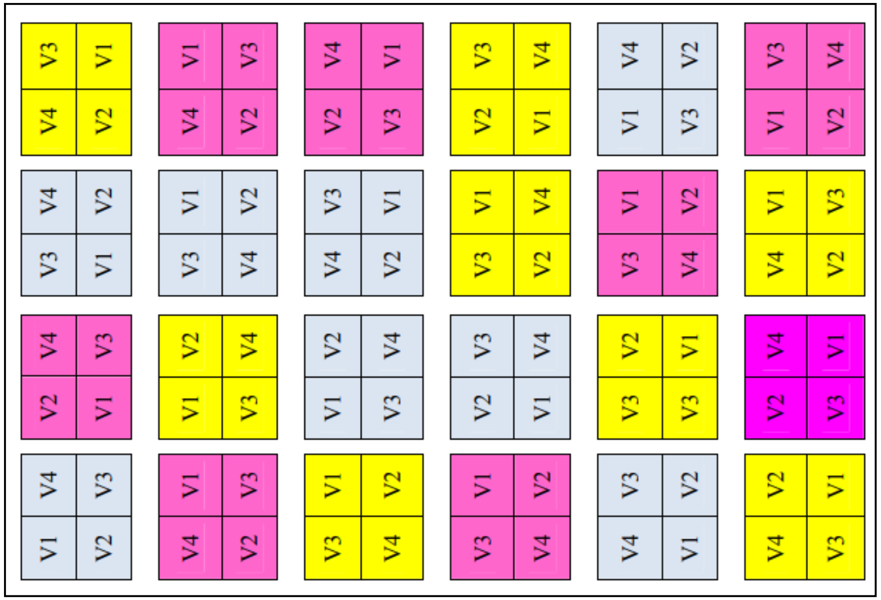
Parcela subdividida

Alternativa 1: DCA com 24 unidades experimentais

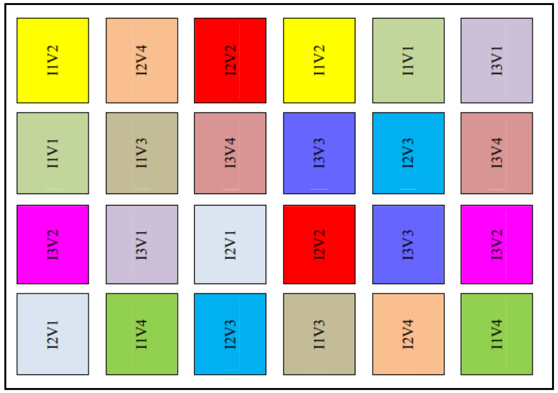


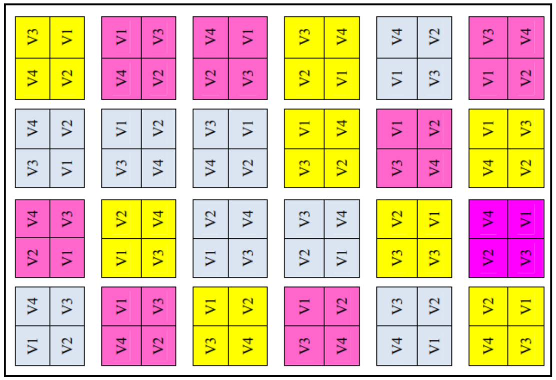
Os 12 tratamentos são aleatorizados a 24 u.e. (replicas = 2)

Alternativa 2: As irrigações (I1, I2 e I3) são aleatorizadas aos 24 canteiros (u.e.1). Em cada canteiro, as variaedades (V1, V2, V3 e V4) são aleatorizadas às sub-parcelas (u.e.2 dentro da u.e.1).



Delineamentos SpliPlot





Alternativa 1: Modelo

$$y_{ijk} = \mu + \tau_j + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}$$

$$j = 1,2,3; \;\; k = 1,2,3,4; \;\; i = 1,2$$

$$\sum_j \tau_j = \sum_k \beta_k = \sum_j \gamma_{jk} = \sum_k \gamma_{jk} = 0$$

$$e_{ijk} \sim N\left(0;\sigma^2\right)$$

n=24

Alternativa 2: Modelo

$$y_{ijk} = \mu + \tau_j + u_{ij} + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}$$

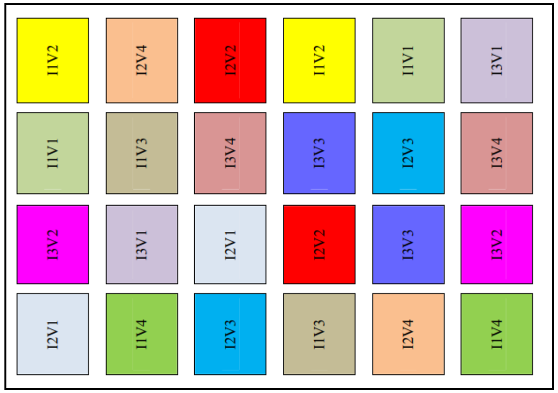
$$u_{ij} \sim N\left(0;\sigma_1^2\right) \perp e_{ijk} \sim N\left(0;\sigma_e^2\right)$$

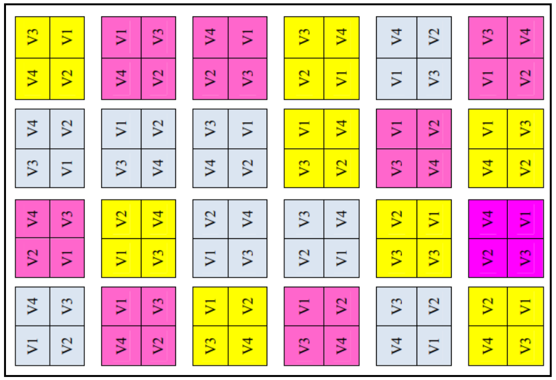
Covariância entre respostas da mesma parcela: simetria composta (uniforme)

$$Cov\left(y_{ijk}, y_{i'jk'}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2+\sigma_e^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ & \sigma_1^2+\sigma_e^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sim & & \sigma_1^2+\sigma_e^2 & \sigma_1^2 \\ & & & \sigma_1^2+\sigma_e^2 \end{pmatrix}$$

n_1=24,$n_{2(1)}$=4 $\Rightarrow$ n=96 (3*4*8)

Delineamentos SpliPlot





$n_1=24$
$r_1=8$

Tabela de ANOVA

Alternativa 1

Fontes de Variação	GL
Irrigação	2
Variedade	3
Interação	6
Resíduo	19
Total	23

Tabela de ANOVA

Alternativa 2

Fontes de Variação	GL	
Irrigação	2	$a-1$
Resíduo 1	21	$a(r_1-1)$
Sub-total	23	(n_1-1)
Variedade	3	$b-1$
Interação	6	$(a-1)(b-1)$
Resíduo 2	63	$a(b-1)(r_1-1)$
Total	95	$(n-1)$

Delineamentos SpliPlot

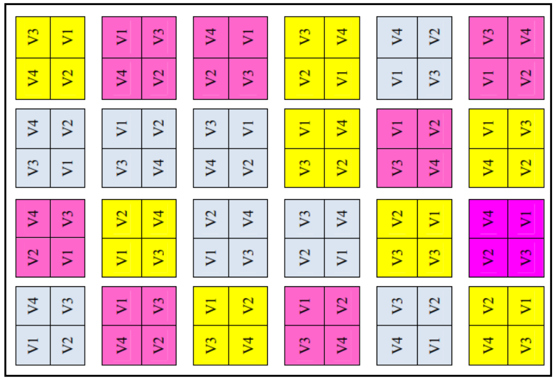


Tabela de ANOVA

Alternativa 2

Fontes de Variação	GL
Irrigação	2
Resíduo 1	21
Sub-total	23
Variedade	3
Interação	6
Resíduo 2	63
Total	95

24=3 x 8

3 níveis de irrigação cada um com **r=8**

O delineamento pode ser reduzido para **r=5** réplicas no primeiro nível de aleatorização

Fontes de Variação	GL
Irrigação	2
Resíduo 1	12
Sub-total	14
Variedade	3
Interação	6
Resíduo 2	36
Total	59

Delineamentos SpliPlot
ou Delineamentos Multi-Estratificados

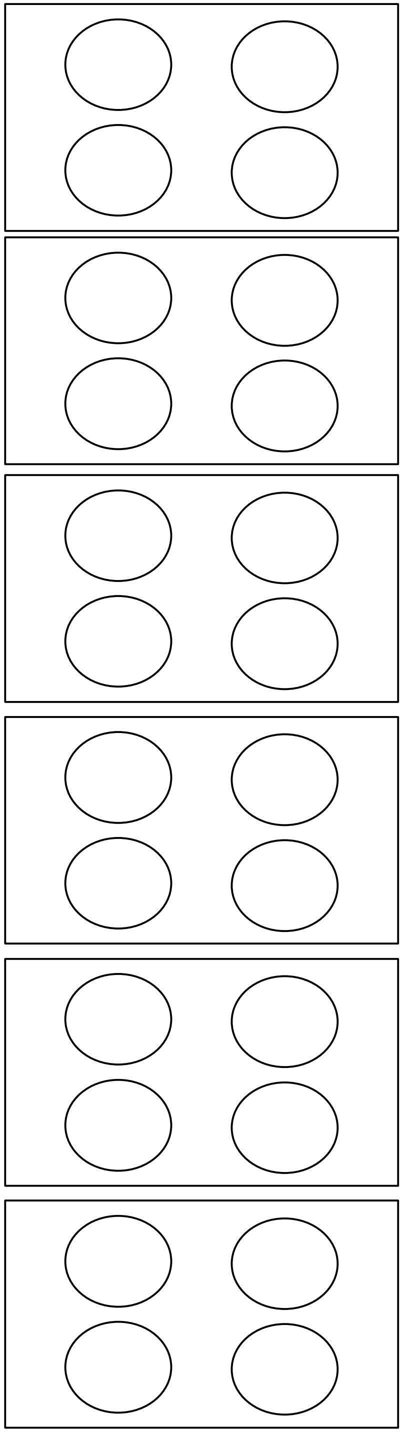
Muitas fontes de variação

O exemplo Fatorial 3x4 (Irrigação e Variedades)ilustra um delineamento balanceado em parcelas-subdivididas com dois fatores.

O balanceamento pode ficar mais difícil de ser garantido quando o número de fatores aumenta devido a restrições no número de sub-parcelas.

Cada Parcela Principal pode ser vista como um Bloco para o delineamento referente aos fatores nas sub-parcelas. CONTUDO, neste caso, as observações dentro do bloco apresentam covariâncias (não são assumidas independentes).

Delineamentos SpliPlot

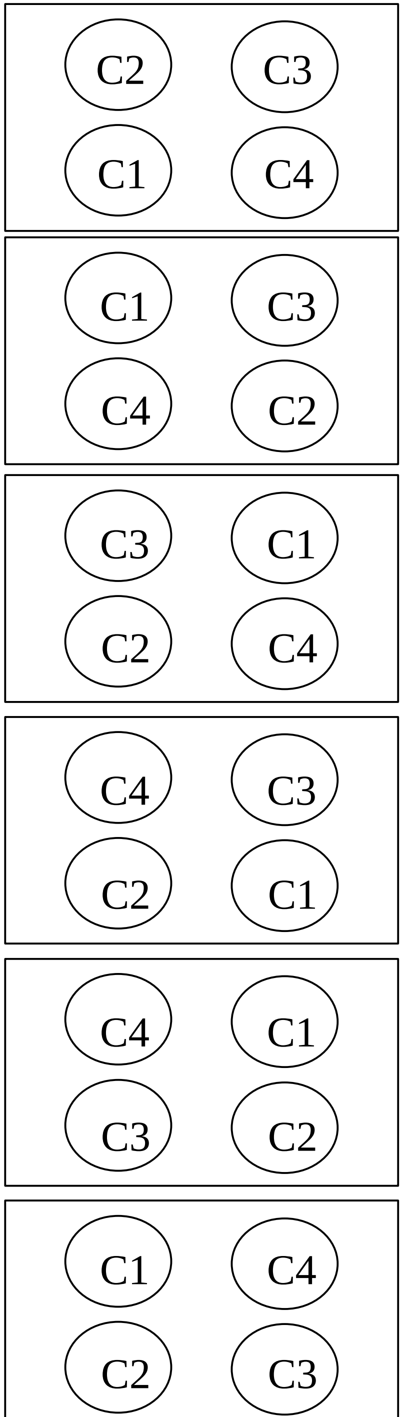


Experimento industrial: Verificar a resistência à corrosão de barras de aço revestidas com 4 materiais diferentes (C1, C2, C3, C4) e submetidas a 3 diferentes temperaturas (360°C, 370°C e 380°C).

Condição experimental: existem 6 fornos com 4 colunas de aquecimento.

Aleatorização 1: aleatorizar as 3 temperaturas aleatoriamente aos 6 fornos.

Aleatorização 2: aleatorizar os 4 tratamentos nas posições de cada forno.



Delineamentos SpliPlot

Experimento industrial: Verificar a resistência à corrosão de barras de aço revestidas com 4 materiais diferentes (C1, C2, C3, C4) e submetidas a 3 diferentes temperaturas (360°C, 370°C e 380°C).

Condição experimental: existem 6 fornos com 4 colunas de aquecimento.

Aleatorização 1: aleatorizar as 3 temperaturas aleatoriamente aos 6 fornos.

Aleatorização 2: aleatorizar os 4 tratamentos nas posições de cada forno.

Temp	C1	C2	C3	C4
360	67	73	83	89
	33	8	46	54
370	65	91	87	86
	140	142	121	150
380	155	127	147	212
	108	100	90	153

Delineamentos SpliPlot

Esqueleto da ANOVA

n1=6, r1=2, a=3, b=4, n=24

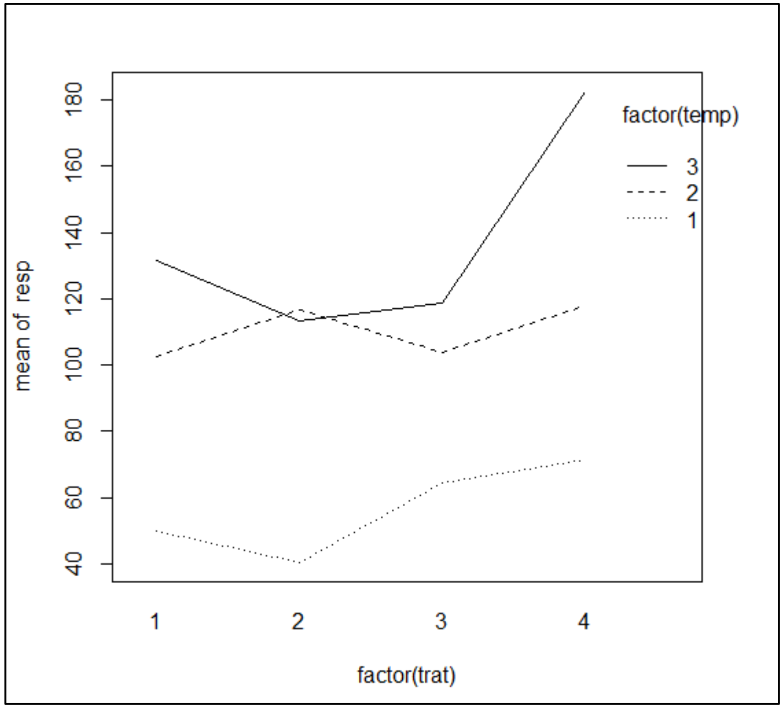
FV	nGL
Temp	(3-1)=2
Res1	3(2-1)=3
SubTotal	**(6-1)=5**
Trat	(4-1)=3
Temp*trat	(3-1)(4-1)=6
Res2	3(4-1)(2-1)=9
Total	**24-1=23**

Tabela de ANOVA

	npar	Sum Sq	Mean Sq	F value
factor(temp)	2	686.2	343.09	2.7548
factor(trat)	3	4289.1	1429.71	11.4798
factor(temp):factor(trat)	6	3269.8	544.96	4.3757

Efeitos aleatórios

Groups	Name	Std.Dev.
u1	(Intercept)	34.24
Residual		11.16



IC Bootstrap

	2.5 %	97.5 %
.sig01	12.301025	85.66795
.sigma	5.882823	15.18173
(Intercept)	1.175311	106.38312
factor(temp)2	-16.959406	125.83224
factor(temp)3	15.263402	149.43436
factor(trat)2	-31.416970	13.16407
factor(trat)3	-8.594895	36.83418
factor(trat)4	-1.077222	42.24273
factor(temp)2:factor(trat)2	-8.613674	54.12488
factor(temp)3:factor(trat)2	-39.112258	24.33737
factor(temp)2:factor(trat)3	-43.131832	18.57100
factor(temp)3:factor(trat)3	-57.476223	2.43436
factor(temp)2:factor(trat)4	-36.182818	27.38706
factor(temp)3:factor(trat)4	-1.716140	60.24685

Não há ef. Interação $\Rightarrow$ Modelo reduzido

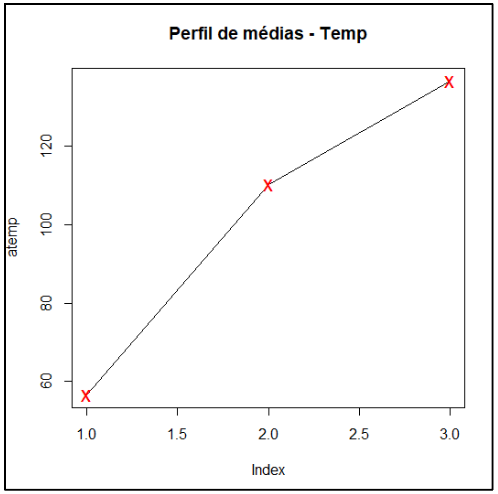
Delineamentos SpliPlot

Tabela de ANOVA – Modelo reduzido (aditivo)

	npar	Sum Sq	Mean Sq	F value
factor(temp)	2	1612.7	806.36	2.7548
factor(trat)	3	4289.1	1429.71	4.8844

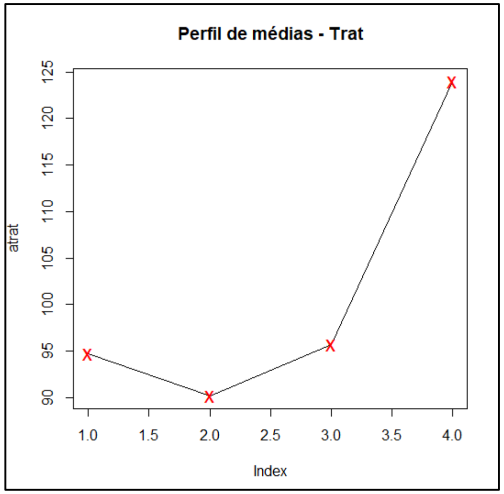
Efeitos aleatórios

Groups	Name	Variance	Std.Dev.
u1	(Intercept)	1130.1	33.62
Residual		292.7	17.11



Efeito de Temp (valor-p ajustado)

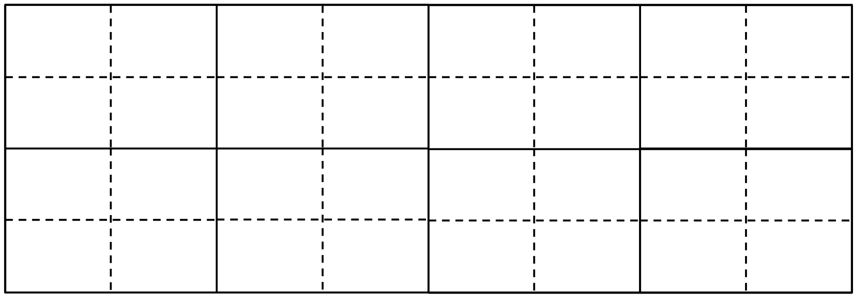
contrast	estimate	SE	df	t.ratio	p.value
1 - 2	-53.6	34.7	3	-1.546	0.3896
1 - 3	-79.9	34.7	3	-2.303	0.1987
2 - 3	-26.2	34.7	3	-0.757	0.7512



Efeito de Trat (valor-p ajustado)

contrast	**estimate**	**SE**	**df**	**t.ratio**	**p.value**
1 - 2	4.5	9.88	15	0.456	0.9675
1 - 3	-1.0	9.88	15	-0.101	0.9996
1 - 4	-29.3	9.88	15	-2.970	0.0424
2 - 3	-5.5	9.88	15	-0.557	0.9432

Delineamentos SpliPlot



Descrever a estrutura deste delineamento Spli-Plot.

n1=8: número de plotes completos do primeiro nível de aleatorização

r1= 4

a = 2, b=4

n=32

Ohelert (2010): john

	plot	fertilizer	variety	mass
1	7	control	A	11.6
2	7	control	B	7.7
3	7	control	C	12.0
4	7	control	D	14.0
5	5	control	A	8.9
6	5	control	B	9.5
7	5	control	C	11.7
8	5	control	D	15.0
9	6	control	A	10.8
10	6	control	B	11.0
11	6	control	C	12.1
12	6	control	D	12.9
13	1	control	A	10.0
14	1	control	B	9.3
15	1	control	C	12.4
16	1	control	D	15.0
17	8	new	A	16.7
18	8	new	B	14.6
19	8	new	C	18.2
20	8	new	D	18.1
21	2	new	A	15.1
22	2	new	B	11.6
23	2	new	C	15.3
24	2	new	D	16.7
25	4	new	A	18.0
26	4	new	B	11.5
27	4	new	C	16.9
28	4	new	D	20.6
29	3	new	A	15.9
30	3	new	B	17.4
31	3	new	C	17.1
32	3	new	D	18.6

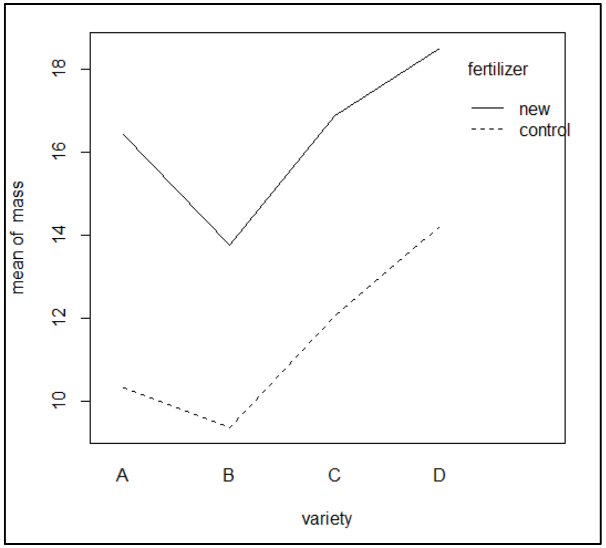
Delineamentos SpliPlot

Tabela de ANOVA - Dados Oehlert (2010)

```
                     npar  Sum Sq Mean Sq F value
fertilizer              1 137.413 137.413 68.2395
variety                 3  96.431  32.144 15.9627
fertilizer:variety      3   4.173   1.391  0.6907
```

Efeitos aleatórios

```
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 plot      (Intercept) 0.2003   0.4475
 Residual              2.0137   1.4190
Number of obs: 32, groups:  plot, 8
```

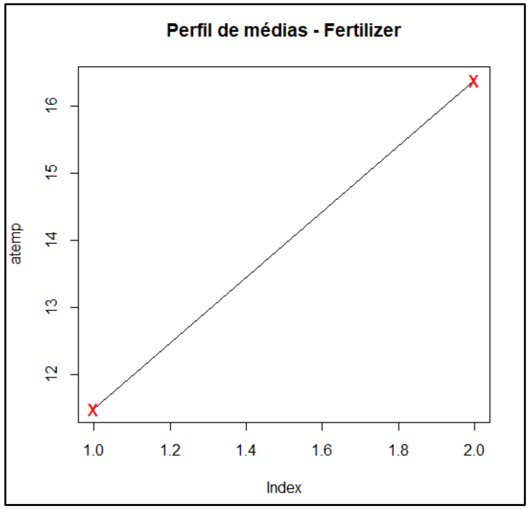


IC (method="Wald")

```
                                2.5 %     97.5 %
(Intercept)                 8.8668479 11.7831521
fertilizernew               4.0378616  8.1621384
varietyB                   -2.9166559  1.0166559
varietyC                   -0.2416559  3.6916559
varietyD                    1.9333441  5.8666559
fertilizernew:varietyB     -4.4812715  1.0812715
fertilizernew:varietyC     -4.0562715  1.5062715
fertilizernew:varietyD     -4.6062715  0.9562715
```

Não há ef. Interação $\Rightarrow$ Modelo reduzido

Delineamentos SpliPlot



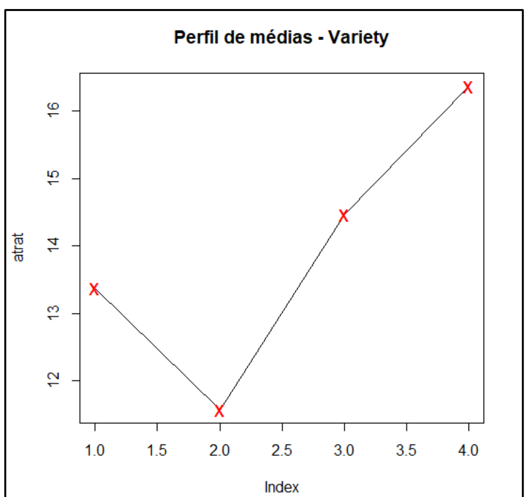


Tabela de ANOVA – Moodelo reduzido (aditivo)

```
           npar  Sum Sq Mean Sq F value
fertilizer    1 131.341 131.341  68.240
variety       3  96.431  32.144  16.701
```

Efeitos aleatórios

```
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 plot     (Intercept) 0.2225   0.4717
 Residual             1.9247   1.3873
```

IC (method="bootstrap")

```
                  2.5 %     97.5 %
.sig01         0.0000000  1.2245619
.sigma         0.9498976  1.7605467
(Intercept)    9.7869441 12.1378883
fertilizernew  3.7030075  6.0429866
varietyB      -3.1827331 -0.5035862
varietyC      -0.3277087  2.4025891
varietyD       1.6860275  4.3465932
```

Ajustar o modelo sem o efeito aleatório

Efeito de Fertilizer

```
              estimate    SE df t.ratio p.value
control - new     -4.9 0.593  6 -8.261  0.0002
```

Efeito de Variety

```
contrast estimate    SE df t.ratio p.value
 A - B       1.80 0.694 21   2.595  0.0739
 A - C      -1.09 0.694 21  -1.568  0.4174
 A - D      -2.99 0.694 21  -4.307  0.0016
 B - C      -2.89 0.694 21  -4.163  0.0023
 B - D      -4.79 0.694 21  -6.902  <.0001
 C - D      -1.90 0.694 21  -2.739  0.0552
```

Delineamento Split-Split-Plot

A partição (split) é nas Unidades Experimentais

Split-split-plot

		Técnica 1					Técnica 2				
Tecido	MP	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10
T1	Gel										
	Sol										
	Filt										
	Pip										
T2	Gel										
	Sol										
	Filt										
	Pip										
T3	Gel										
	Sol										
	Filt										
	Pip										
T4	Gel										
	Sol										
	Filt										
	Pip										

Quantificação de proteínas em Tecidos Tumorais de acordo com o Método de Preparação (MP) das amostras e Técnica de leitura

Estrutura das Unidades Experimentais:

- Cada amostra de tecido é particionada (split) em 4 pedaços que são aleatorizados aos MP
- Cada solução preparada é particionada (split) em 10 alícotas, metade das quais é aleatorizada às Técnicas 1 ou 2.

Estrutura de Tratamentos:

Dois fatores (Método de Preparação e Técnica) cruzados (Fatorial 2x4) hierárquicos dentro de Tecido.

Quais são as unidades amostrais, experimentais e de mensuração? Há possível dependência entre observações dentro do mesmo tecido? E entre as réplicas do mesmo tecido e do mesmo MP?

Delineamentos com Medidas Repetidas

Os fatores sob estudo (Tratamentos) são aplicados à mesma unidade experimental. Neste tipo de delineamento o sujeito (u.e.) é considerado um fator aleatório

Motivação

Delineamento com Um Único Fator
Medidas Repetidas em Um Único Fator (J=4, r=5)

Sujeito 1	**T4**	**T3**	**T2**	**T1**
Sujeito 2	**T3**	**T4**	**T1**	**T2**
Sujeito 3	**T4**	**T3**	**T1**	**T2**
Sujeito 4	**T2**	**T1**	**T4**	**T3**
Sujeito 5	**T1**	**T2**	**T4**	**T3**

Exemplo de "sujeitos (u.e.)": pacientes, juiz

$\Rightarrow$ Há Aleatorização da ordem dos tratamentos dentro dos sujeitos

$\Rightarrow$ Delineamento com Medidas Repetidas é um Delineamento em Blocos Randomizados (Bloco é Fator Aleatório)

$\Rightarrow$ Uma alternativa é o Delineamento Quadrado Latino – CrossOver em que há balanceamento do número de vezes que um tratamento é precedido pelo outro. Neste caso o paciente é modelado como fator fixo (Fator Linha)

Delineamentos com Medidas Repetidas

Medidas repetidas em Um Único Fator
(a=4, r=5)

Sujeito 1	**T4**	**T3**	**T2**	**T1**
Sujeito 2	**T3**	**T4**	**T1**	**T2**
Sujeito 3	**T4**	**T3**	**T1**	**T2**
Sujeito 4	**T2**	**T1**	**T4**	**T3**
Sujeito 5	**T1**	**T2**	**T4**	**T3**

Juízes avaliam vinhos

Juiz	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**
1	20	24	28	28
2	15	18	23	24
3	18	19	24	23
4	26	26	30	30
5	22	24	28	26

$$y_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n_j = r; \; j = 1, \ldots, a$$

j-ésima resposta avaliada no sujeito i
(unidade experimental i)

Delineamentos com Medidas Repetidas

Medidas repetidas em Um Único Fator

(a níveis do Fator, r réplicas)

Sujeito 1	**T4**	**T3**	**…**	**Ta**
Sujeito 2	**Ta**	**T1**	**…**	**T2**
…				
Sujeito r	**T1**	**T2**	**…**	**T3**

Suposição: aditividade entre u.e. e Trat!

$$y_{ij} = \mu + \boxed{\rho_i + \tau_j} + e_{ij}; \quad i = 1,\ldots,r;\ j = 1,\ldots,a$$

Variáveis aleatórias

$$\sum_j \tau_j = 0;\ \ \rho_i \sim N\left(0\,;\sigma_\rho^2\right) \quad \perp \quad e_{ijk} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right)$$

Fator fixo: restrição de identificabilidade (parametrização de desvios)

$$\Rightarrow y_{ij} \sim N\left(\mu + \tau_j\ ; \sigma_\rho^2 + \sigma_e^2\right) \qquad Cov\left(y_{ij}; y_{i'j'}\right) = \begin{cases} \sigma_\rho^2 + \sigma_e^2 & i = i';\ j = j' \\ \sigma_\rho^2 & i = i';\ j \neq j' \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Modelo de componentes de variância e estrutura de correlação uniforme

$$Cor\left(y_{ij}; y_{ij'}\right) = \frac{\sigma_\rho^2}{\sigma_\rho^2 + \sigma_e^2}$$

Coeficiente de correlação intra-classe (uniforme para todos os sujeitos)

Delineamentos com Medidas Repetidas

Medidas repetidas em Um Único Fator

Juízes avaliam vinhos

Juiz	V1	V2	V3	V4
1	20	24	28	28
2	15	18	23	24
3	18	19	24	23
4	26	26	30	30
5	22	24	28	26

FV	GL	E(QM)
Sujeito	r-1	$\sigma_e^2 + a\sigma_\rho^2$
A	a-1	$\sigma_e^2 + r\dfrac{\sum \tau_j^2}{a-1}$
Resíduo	(r-1)(a-1)	σ_e^2
Total	ra-1	

$$y_{ij} = \mu + \rho_i + \tau_j + e_{ij}; \quad i = 1,\ldots,r; \; j = 1,\ldots,a$$

Suposição: aditividade entre u.e. e Trat! Como em Blocos (fixo) o resíduo é a interação.

$$SQTotal = SQSujeitos + SQFator + SQ\,\mathrm{Re}\,síduo$$

$$\sum_{ij}\left(y_{ij} - \bar{y}_{..}\right)^2 = \sum_i\left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}\right)^2 + \sum_j\left(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}\right)^2 + \sum_{ij}\left(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}\right)^2$$

Delineamentos com Medidas Repetidas

Medidas repetidas em Um Único Fator

Juízes avaliam vinhos

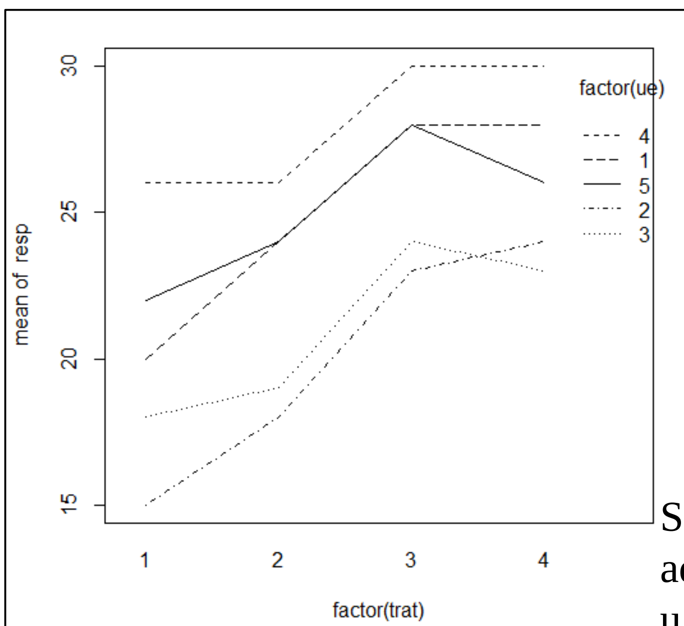
Juiz	V1	V2	V3	V4
1	20	24	28	28
2	15	18	23	24
3	18	19	24	23
4	26	26	30	30
5	22	24	28	26

```
Tabela de ANOVA
               npar Sum Sq Mean Sq F value
factor(trat)      3  145.6  48.533  40.444

Efeitos Aleatórios
 Groups    Name        Variance Std.Dev.
 ue        (Intercept) 10.4     3.225
 Residual               1.2     1.095

 IC Bootstrap       2.5 %     97.5 %
.sig01           1.0680623  5.999450
.sigma           0.6510461  1.549515
(Intercept)     17.2063768 23.455585
factor(trat)2    0.5959574  3.314128
factor(trat)3    5.0644990  7.730844
factor(trat)4    4.7236146  7.279308

Contrast estimate    SE df t.ratio p.value
 1 - 2        -2.0 0.693 12  -2.887  0.0576
 1 - 3        -6.4 0.693 12  -9.238  <.0001
 1 - 4        -6.0 0.693 12  -8.660  <.0001
 2 - 3        -4.4 0.693 12  -6.351  0.0002
 2 - 4        -4.0 0.693 12  -5.774  0.0004
 3 - 4         0.4 0.693 12   0.577  0.9370
```



Suposição: aditividade entre u.e. e Trat!

$$\left(\mu_1 = \mu_2\right) < \left(\mu_3 = \mu_4\right)$$

Delineamentos com Medidas Repetidas

Delineamento Fatorial axb
Medidas repetidas em 2 Fatores
(a=2,b=2, r=5)

Sujeito 1	**A1B2 A2B2 A1B1 A2B1**
Sujeito 2	**A1B2 A2B2 A1B1 A2B1**
Sujeito 3	**A1B2 A2B2 A1B1 A2B1**
Sujeito 4	**A1B2 A2B2 A1B1 A2B1**
Sujeito 5	**A1B2 A2B2 A1B1 A2B1**

Juízes avaliam vinhos produzidos segundo o Tipo de Uva (Fator A: A1 e A2) e o Tempo de Armazenamento (Fator B: B1 e B2)

Juiz	**A1B1**	**A1B2**	**A2B1**	**A2B2**
1	20	24	28	28
2	15	18	23	24
3	18	19	24	23
4	26	26	30	30
5	22	24	28	26

$$y_{ijk}, \quad i = 1, \ldots, = r; \; j = 1, \ldots, a; \; k = 1, \ldots, b$$

jk-ésima resposta avaliada no sujeito i (unidade experimental i)

Delineamentos com Medidas Repetidas Em Dois Fatores

Suposição: aditividade entre u.e. e Tratamentos!

$$y_{ijk} = \mu + \rho_i + \tau_j + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}; \quad i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, a;\ k = 1, \ldots, b$$

Variáveis aleatórias

$$\sum_j \tau_j = \sum_k \beta_k = \sum_j \gamma_{jk} = \sum_k \gamma_{jk} = 0;$$

$$\rho_i \sim N\left(0\,; \sigma_\rho^2\right) \quad \perp \quad e_{ijk} \sim N\left(0\,; \sigma_e^2\right)$$

Fatores fixos: restrição de identificabilidade (parametrização de desvios)

$$\Rightarrow y_{ij} \sim N\left(\mu + \tau_j + \beta_k + \gamma_{jk}\,; \sigma_\rho^2 + \sigma_e^2\right)$$

Modelo de componentes de variância e estrutura de correlação uniforme

$$Cov\left(y_{ijk}; y_{i'j'k'}\right) = \begin{cases} \sigma_\rho^2 + \sigma_e^2 & i = i'; j = j'; k = k' \\ \boxed{\sigma_\rho^2 \qquad i = i'; j \neq j' \vee k \neq k'} \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Delineamentos com Medidas Repetidas

Juízes avaliam vinhos produzidos segundo o Tipo de Uva (A1 e A2) e o Tempo de Armazenamento (B1 e B2)

Juiz	A1B1	A1B2	A2B1	A2B2
1	20	24	28	28
2	15	18	23	24
3	18	19	24	23
4	26	26	30	30
5	22	24	28	26

FV	GL	E(QM)
A	a-1	$\sigma_e^2 + br\frac{\sum \tau_j^2}{a-1}$
B	b-1	$\sigma_e^2 + ar\frac{\sum \beta_k^2}{b-1}$
A*B	(a-1)(b-1)	$\sigma_e^2 + r\frac{\sum_{jk} \gamma_{jk}^2}{(a-1)(b-1)}$
Sujeito	r-1	$\sigma_e^2 + ab\sigma_\rho^2$
Resíduo	(r-1)(ab-1)	σ_e^2
Total	ra-1	

Suposição: aditividade entre u.e. e Trat. Resíduo é a interação!

$$y_{ijk} = \mu + \rho_i + \tau_j + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}; \quad i = 1,\ldots,r;\ j = 1,\ldots,a;\ k = 1,\ldots,b$$

$$SQTotal = SQA + SQB + SQA*B + SQSujeitos + SQ\,\mathrm{Re}\,síduo$$

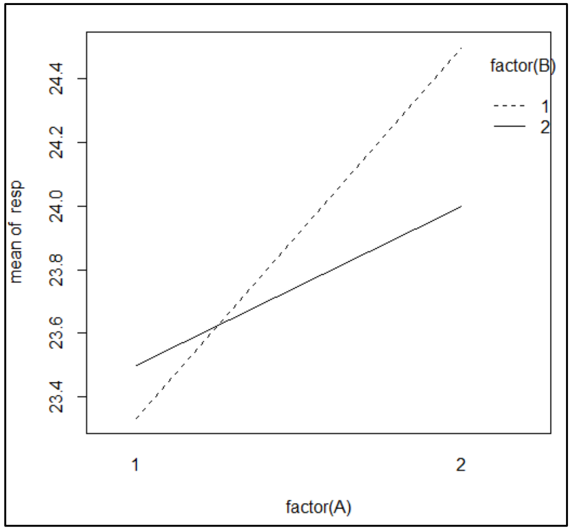
$$\sum_{ijk}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{...}\right)^2 = br\sum_j\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..}\right)^2 + ar\sum_j\left(\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{..}\right)^2 + r\sum_{ijk}\left(\bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...}\right)^2 +$$

$$ab\sum_{ij}\left(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}\right)^2 + \sum_{ijk}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.jk} + \bar{y}_{...}\right)^2$$

Delineamentos com Medidas Repetidas

Juízes avaliam vinhos segundo o Tipo de Uva (A1 e A2) e o Tempo de Armazenamento (B1 e B2)

Juiz	A1B1	A1B2	A2B1	A2B2
1	20	24	28	28
2	15	18	23	24
3	18	19	24	23
4	26	26	30	30
5	22	24	28	26




```
Tabela de ANOVA
                    npar Sum Sq Mean Sq F value
factor(A)              1 3.2000  3.2000  0.2655
factor(B)              1 0.1333  0.1333  0.0111
factor(A):factor(B)    1 0.1130  0.1130  0.0094

Efeitos Aleatórios
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 ue       (Intercept) 11.21    3.348
 Residual             12.05    3.471

IC Bootstrap                  2.5 %    97.5 %
.sig01                     0.000000  6.800032
.sigma                     2.128055  4.775678
(Intercept)               18.743120 28.159854
factor(A)2                -6.015514  8.311324
factor(B)2                -7.429784  7.006444
factor(A)2:factor(B)2    -14.031180 13.644585
```

Sob o ajuste do modelo reduzido, sem a interação, não há evidência de efeito significante dos fatores A e B e a variância entre juízes não é significante.

$\Rightarrow$ Média geral = 23.8 (sd=4.18)

Delineamentos com Medidas Repetidas

Delineamento Fatorial axb
Medidas repetidas em um Único Fator

Tratamento A	Sujeito	Ordem do Tratamento B 1	2
A1	1	**A1B1**	**A1B2**
	.		
	.	. . .	
	.		
	r	**A1B2**	**A1B1**
A2	r+1	**A1B1**	**A1B2**
	.		
	.	. . .	
	.		
	2r	**A1B2**	**A1B1**

Escore de habilidade em solucionar problemas de acordo com o tipo de estímulo (A) e o tipo de problema (B)

Tipo de Estímulo (A)	Volunt.	Tipo de Problema (B) Abstrato	Concreto
A1	1	10	18
	2	14	19
	3	17	18
	4	8	12
	5	12	14
	6	15	20
A2	7	16	25
	8	19	22
	9	22	27
	10	20	23
	11	24	29
	12	21	22

Delineamentos Fatoriais axb com Medidas Repetidas em Um Único Fator

$$y_{ijk} = \mu + \boxed{\rho_{i(j)}} + \tau_j + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}; \quad i = 1,\ldots,r;\ j = 1,\ldots,a;\ k = 1,\ldots,b$$

Variáveis aleatórias

$$\sum_j \tau_j = \sum_k \beta_k = \sum_j \gamma_{jk} = \sum_k \gamma_{jk} = 0; \quad \boxed{\rho_{i(j)}} \sim N\left(0\,;\sigma_\rho^2\right) \perp \quad e_{ijk} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right)$$

Fatores fixos: restrição de identificabilidade

$$\Rightarrow y_{ij} \sim N\left(\mu + \tau_j + \beta_k + \gamma_{jk}\,;\sigma_\rho^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$Cov\left(y_{ijk}\,;y_{i'j'k'}\right) = \begin{cases} \sigma_\rho^2 + \sigma_e^2 & i = i';\ j = j';k = k' \\ \boxed{\sigma_\rho^2 \qquad i = i';\ j = j';k \neq k'} \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Medidas Repetidas

Delineamento Fatorial axb
Medidas repetidas em um Único Fator

Tratamento A	Sujeito	Ordem do Tratamento B: 1	2
A1	1	**A1B1**	**A1B2**
	. . .	…	
	r	**A1B2**	**A1B1**
A2	r+1	**A2B1**	**A2B2**
	. . .	…	
	2r	**A2B2**	**A2B1**

FV	GL	E(QM)
A	a-1	$\sigma_e^2 + b\sigma_\rho^2 + br\dfrac{\sum \tau_j^2}{a-1}$
B	b-1	$\sigma_e^2 + ar\dfrac{\sum \beta_k^2}{b-1}$
A*B	(a-1)(b-1)	$\sigma_e^2 + r\dfrac{\sum_{jk} \gamma_{jk}^2}{(a-1)(b-1)}$
Sujeito(A)	a(r-1)	$\sigma_e^2 + b\sigma_\rho^2$
Resíduo	a(r-1)(b-1)	σ_e^2
Total	rab-1	

$$y_{ijk} = \mu + \rho_i + \tau_j + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}; \quad i = 1,\ldots,r;\ j = 1,\ldots,a;\ k = 1,\ldots,b$$

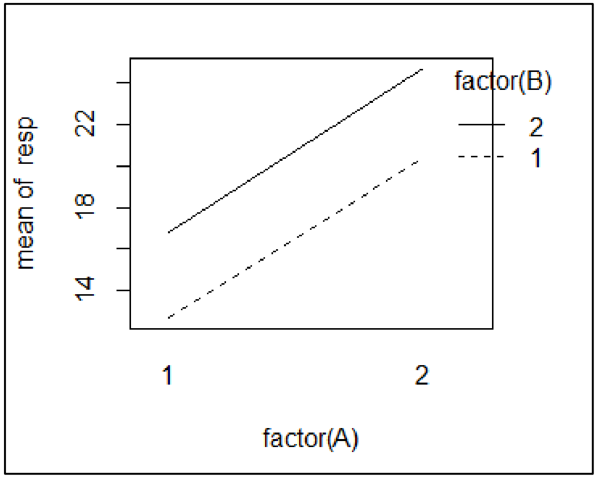
$$SQTotal = SQA + SQB + SQA*B + SQSujeitos + SQ\,\mathrm{Re}síduo$$

$$\sum_{ijk}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{...}\right)^2 = br\sum_j\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..}\right)^2 + ar\sum_j\left(\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{..}\right)^2 + r\sum_{ijk}\left(\bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...}\right)^2 +$$
$$b\sum_{ij}\left(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{.j.}\right)^2 + \sum_{ijk}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{.jk} - \bar{y}_{ij.} + \bar{y}_{.j.}\right)^2$$

Medidas Repetidas

Escore de habilidade em solucionar problemas

Tipo de Estímulo (A)	Volunt.	Tipo de Problema (B): Abstrato	Concreto
A1	1	10	18
	2	14	19
	3	17	18
	4	8	12
	5	12	14
	6	15	20
A2	7	16	25
	8	19	22
	9	22	27
	10	20	23
	11	24	29
	12	21	22




```
Tabela de ANOVA
                    npar   Sum Sq Mean Sq F value
factor(A)              1   82.573  82.573  24.227
factor(B)              1  108.375 108.375  31.797
factor(A):factor(B)    1    0.042   0.042   0.012

Efeitos Aleatórios
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 ue       (Intercept) 5.733    2.394
 Residual             3.408    1.846

IC Bootstrap                      2.5 %     97.5 %
.sig01                        1.0824305  3.965197
.sigma                        0.9897631  2.553271
(Intercept)                   9.8980374 15.240212
factor(A)2                    4.3546959 11.106053
factor(B)2                    2.1452564  6.354115
factor(A)2:factor(B)2        -2.9590180  3.107374
```

Não há interação significante entre os fatores.

Medidas Repetidas

Escore de habilidade em solucionar problemas

Tipo de Estímulo (A)	Volunt.	Tipo de Problema (B): Abstrato	Concreto
A1	1	10	18
	2	14	19
	3	17	18
	4	8	12
	5	12	14
	6	15	20
A2	7	16	25
	8	19	22
	9	22	27
	10	20	23
	11	24	29
	12	21	22

Tabela de ANOVA

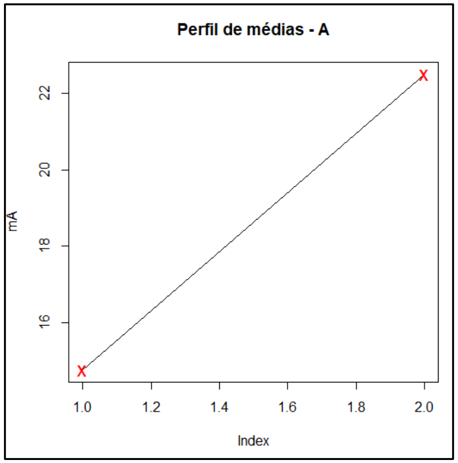
```
          npar  Sum Sq Mean Sq F value
factor(A)    1  75.158  75.158  24.227
factor(B)    1 108.375 108.375  34.934
```

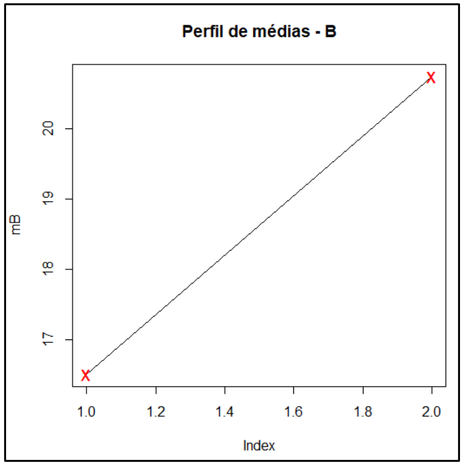
Efeitos Aleatórios

```
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 ue       (Intercept) 5.886    2.426
 Residual             3.102    1.761
```

IC Bootstrap

```
                 2.5 %    97.5 %
.sig01       0.9748833  3.923982
.sigma       0.9909851  2.413254
(Intercept) 10.4423068 15.154680
factor(A)2   4.7729733 10.757464
factor(B)2   2.8121401  5.563659
```





Delineamentos com Medidas Repetidas no Tempo
Dados Longitudinais

ou Medidas Repetidas no Espaço:
diferentes profundidades de um rio

Tipo de Propaganda	Ponto de Venda	Período de Tempo		
		T1	T2	T3
A1	1	958	1047	933
	2	1005	1122	986
	3	351	436	339
	4	549	632	512
	5	730	784	707
	6	780	897	718
A2	7	229	275	202
	8	883	964	817
	9	624	695	599
	10	375	436	351

Os dados podem ser modelados como Medidas Repetidas

- Neste caso, é suposto que os Tempos foram aleatorizados (!!)
- Alem disso, é preciso atenção ao tipo de correlação entre a observações dentro dos sujeitos que pode não seguir um padrão uniforme e homocedástico.

Modelos mais gerais de covariância (dentro de sujeitos): Independência, Uniforme (simetria composta, permutável), autocorrelação, não estruturada.

Dados Longitudinais

Estruturas de Covariância e Correlação entre observações no mesmo nível de um “fator”

$$Cov = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}; \quad Cor = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Independência e homocedasticidade

$$Cov = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \dots & \rho\sigma^2 \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix}; \quad Cor = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Uniforme (permutável, simetria composta)

$$Cov = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \rho^{t-1}\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \dots & \rho^{t-2}\sigma^2 \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix}; \quad Cor = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho^{t-1} \\ \rho & 1 & \dots & \rho^{t-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho & \rho & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

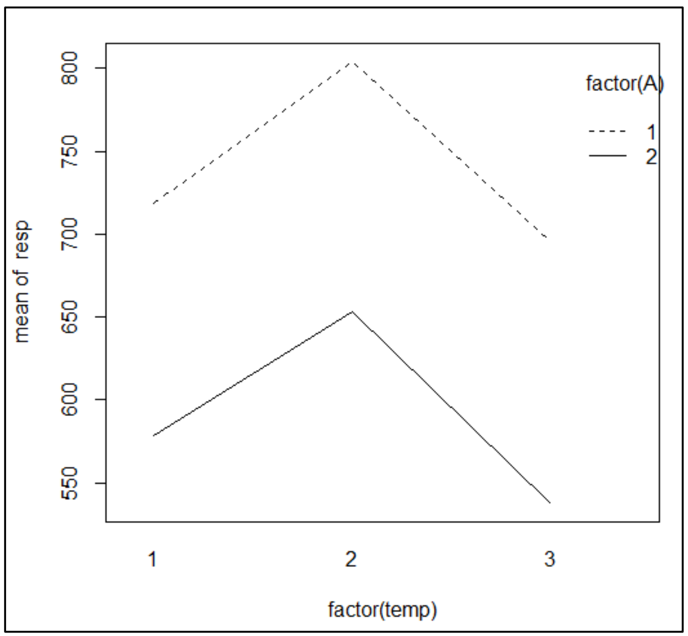
Autocorrelação

$$Cov = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1t} \\ & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2t} \\ \sim & & \dots & \dots \\ & & \dots & \sigma_{tt} \end{pmatrix}; \quad Cor = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ & 1 & \dots & \rho_{2p} \\ \sim & & \dots & \dots \\ & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Não Estruturada

Dados Longitudinais

Tipo de Propaganda	Ponto de Venda	Período de Tempo T1	T2	T3
A1	1	958	1047	933
	2	1005	1122	986
	3	351	436	339
	4	549	632	512
	5	730	784	707
A2	6	780	897	718
	7	229	275	202
	8	883	964	817
	9	624	695	599
	10	375	436	351

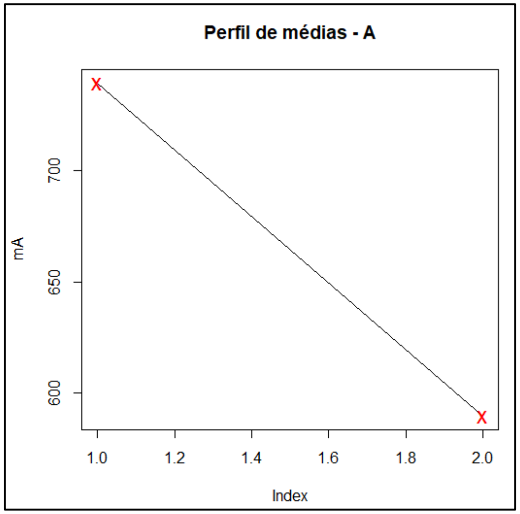



```
Tabela de ANOVA
                         npar Sum Sq Mean Sq F value
factor(A)                   1    263     263   0.733
factor(temp)                2  67073   33537  93.686
factor(A):factor(temp)      2    391     196   0.546

Efeitos Aleatórios
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 ue       (Intercept) 76284    276.20
 Residual               358     18.92

IC Bootstrap                    2.5 %       97.5 %
.sig01                    158.86962  452.743546
.sigma                     11.64586   24.428591
(Intercept)               482.31009  953.999558
factor(A)2               -490.79094  218.344657
factor(temp)2              62.58739  108.872318
factor(temp)3             -47.42476    2.960969
factor(A)2:factor(temp)2  -43.59394   22.059591
factor(A)2:factor(temp)3  -51.72853   15.861192
```

O efeito de interação não é significante



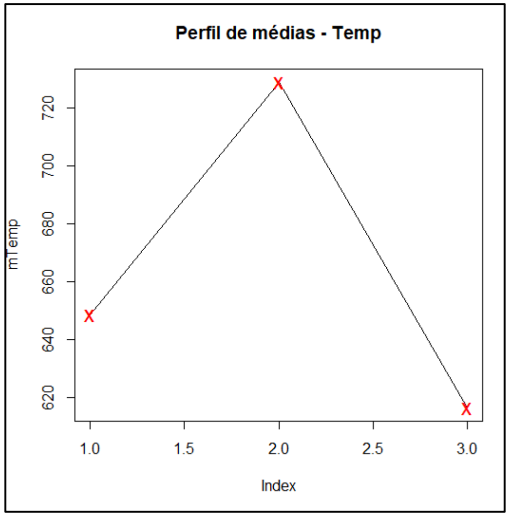


Tabela de ANOVA

	npar	Sum Sq	Mean Sq	F value
factor(A)	1	249	249	0.7336
factor(temp)	2	67073	33537	98.6541

Efeito Aleatório

Groups	Name	Variance	Std.Dev.
ue	(Intercept)	76290.1	276.21
Residual		339.9	18.44

IC Bootstrap	2.5 %	97.5 %
.sig01	148.34683	433.26199
.sigma	12.32876	23.78043
(Intercept)	469.13611	965.17837
factor(A)2	-477.83692	196.09751*
factor(temp)2	64.28092	97.25089
factor(temp)3	-47.62181	-15.80675

Fator Temp

Contrast	estimate	SE	df	t.ratio	p.value
1 - 2	-80.4	8.25	18	-9.751	<.0001
1 - 3	32.0	8.25	18	3.881	0.0030
2 - 3	112.4	8.25	18	13.632	<.0001

- Não há efeito significante de A*
- Há efeito significante de Temp: $\mu_{.2} > \mu_{.1} > \mu_{.3}$