Monitoria - 26/11

questão 3 - Lista 2

a) Em cada instante de tempo há dois possíveis estados, que chamarei de low (ℓ) e high (h).

O problema do planejador central é dado por

$$\max_{\substack{c_t^{a,\ell},\, c_t^{b,\ell} \\ c_t^{a,h},\, c_t^{b,h}}} \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{1}{2} u(c_t^{a,\ell}) + \frac{1}{2} u(c_t^{a,h}) \right\} + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \frac{1}{2} u(c_t^{b,\ell}) + \frac{1}{2} u(c_t^{b,h}) \right\}$$

sujeito a: 1) $c_t^{a,\ell} + c_t^{b,\ell} \leq 2$, $\forall t$

2) $c_t^{a,h} + c_t^{b,h} \leq 2$, $\forall t$

Lagrangeano:

$$\mathcal{L}: \frac{1}{2}\sum_t \beta^t \left\{ \frac{1}{2} u(c_t^{a,\ell}) + \frac{1}{2} u(c_t^{a,h}) \right\} + \frac{1}{2}\sum_t \beta^t \left\{ \frac{1}{2} u(c_t^{b,\ell}) + \frac{1}{2} u(c_t^{b,h}) \right\}$$

$$+ \sum_t \lambda_t \left(2 - c_t^{a,\ell} - c_t^{b,\ell} \right) + \sum_t \gamma_t \left(2 - c_t^{a,h} - c_t^{b,h} \right)$$

CPO's:

$c_t^{a,e}$: $\frac{1}{4}\beta^t u'(c_t^{a,e}) - \lambda_t = 0$ (1)

$c_t^{a,h}$: $\frac{1}{4}\beta^t u'(c_t^{a,h}) - \gamma_t = 0$ (2)

$c_t^{b,e}$: $\frac{1}{4}\beta^t u'(c_t^{b,e}) - \lambda_t = 0$ (3)

$c_t^{b,h}$: $\frac{1}{4}\beta^t u'(c_t^{b,h}) - \gamma_t = 0$ (4)

De (1) e (3):

$$u'(c_t^{a,e}) = u'(c_t^{b,e})$$

$$\rightarrow \frac{1}{(c_t^{a,e})^2} = \frac{1}{(c_t^{b,e})^2} \xrightarrow{c_t \geq 0} c_t^{a,e} = c_t^{b,e}$$

Como $c_t^{a,e} + c_t^{b,e} = 2$, segue:

$c_t^{a,e} = c_t^{b,e} = 1$

De (2) e (4):

$$u'(c_t^{a,h}) = u'(c_t^{b,h}) \rightarrow c_t^{a,h} = c_t^{b,h} = 1$$

Logo, a alocação de consumo entre os indivíduos ao longo do tempo é

$c_t^a = c_t^b = 1, \forall t$

item b) Para mostrar que a alocação do item a não é implementável, basta encontrar um instante t e um indivíduo i (a ou b) tal que

$$\underbrace{u(c_t^i) + \beta \cdot E\left[\sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} u(c_s^i)\right]}_{A} < \underbrace{u(y_t^i) + \beta E\left[\sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} u(y_s^i)\right]}_{= B}$$

Como $u(c) = -\frac{1}{c}$, o lado esquerdo da desigualdade é dado por:

$$-1 + \beta \cdot \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} \cdot (-1) = -1 - \beta \cdot \sum_{s'=0}^{\infty} \beta^{s'}$$

$$= -1 - \beta \cdot \frac{1}{1-\beta} = -\frac{1}{1-\beta}$$

Em um dado instante t, um dos indivíduos estará com dotação $1+\phi$. Pegue este indivíduo e calcule o lado direito da desigualdade:

$$\frac{-1}{1+\phi} + \beta \cdot \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1+\phi} + \frac{-1}{1-\phi}\right)$$

$$= \frac{-1}{1+\phi} - \beta \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\phi} + \frac{1}{1-\phi}\right) \cdot \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)}$$

$$= \frac{-1}{1+\phi} - \frac{\beta}{1-\phi^2} \cdot \frac{1}{1-\beta}$$

$$= - \frac{\beta + (1-\beta)(1-\phi)}{(1-\phi^2)(1-\beta)} = - \frac{\beta + 1 - \phi - \beta + \beta\phi}{(1-\phi^2)(1-\beta)}$$

$$= - \frac{1-\phi+\beta\phi}{(1-\phi^2)(1-\beta)}$$

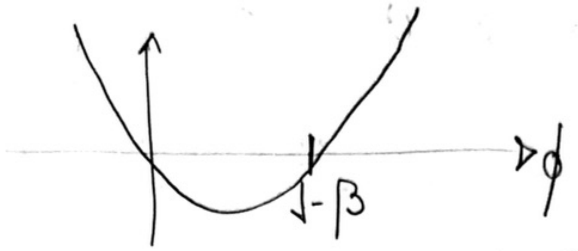
Calculando A - B (a diferença entre os dois lados da desigualdade):

$$A - B = \frac{-1}{1-\beta} + \frac{1-\phi+\beta\phi}{(1-\phi^2)(1-\beta)}$$

$$= \frac{-(1-\phi^2) + 1 - \phi + \beta\phi}{(1-\beta)(1-\phi^2)}$$

$$= \frac{-1 + \phi^2 + 1 - \phi + \beta\phi}{(1-\beta)(1-\phi^2)} = \frac{\phi^2 - \phi(1-\beta)}{(1-\beta)(1-\phi^2)}$$

Repare que o denominador é positivo e o numerador tem a seguinte formato



Se $\phi < 1-\beta$, então $A - B < 0 \rightarrow A < B$, ou seja,

$$u(c_t^i) + \beta E\left(\sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} u(c_s^i)\right) < u(y_t^i) + \beta E\left\{\sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} u(y_s^i)\right\}$$

e a estratégia é não implementável.

Como $\phi = 0{,}4$ e $1-\beta = 0{,}5$, este é o caso.

c) Assumindo um plano de consumo caracterizado por:

$$(c_t^a, c_t^b) = \begin{cases} (1+\varepsilon, 1-\varepsilon), \text{ se } (y_t^a, y_t^b) = (1+\phi, 1-\phi) \\ (1-\varepsilon, 1+\varepsilon), \text{ se } (y_t^a, y_t^b) = (1-\phi, 1+\phi) \end{cases}$$

O problema do planejador central passa a ser

$$\max_{\varepsilon} \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{1-\varepsilon}\right) - 1 + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{2}{1-\varepsilon^2}\right) \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t - 1 = \frac{-\beta}{(1-\beta)(1-\varepsilon^2)} - 1$$

Note que este é um número negativo. Para maximizar, queremos torná-lo próximo a 0, maximizando o denominador.

Para fazer isso, devemos escolher o menor valor de ε possível compatível com a restrição de implementabilidade.

Considere um instante de tempo em que o indivíduo está com dotação $1+\phi$.

Neste caso devemos assegurar que:

$$\frac{-1}{1+\varepsilon} + \beta \cdot \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} \cdot \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{1}{1-\varepsilon}\right) \geq \frac{-1}{1+\phi} + \beta \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} \cdot \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+\phi} - \frac{1}{1-\phi}\right)$$

O lado esquerdo é equivalente a

$$\frac{-1}{1+\varepsilon} - \frac{\beta}{1-\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{1-\beta} = -\frac{(1-\varepsilon)(1-\beta)+\beta}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)} =$$

$$= -\frac{1-\beta-\varepsilon+\varepsilon\beta+\beta}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)} = -\frac{1-\varepsilon+\varepsilon\beta}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)}$$

O lado direito tem a mesma cara, só trocar ε por ϕ, logo:

$$-\frac{1-\phi+\phi\beta}{(1-\phi^2)(1-\beta)}$$

queremos:

$$-\frac{1-\varepsilon+\varepsilon\beta}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)} \geq -\frac{1-\phi+\phi\beta}{(1-\phi^2)(1-\beta)}$$

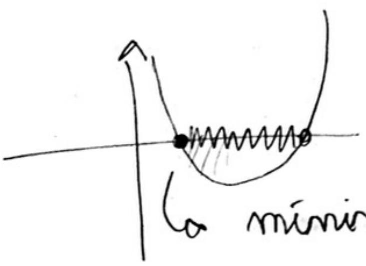
$$\iff \quad \frac{1-\varepsilon+\varepsilon\beta}{1-\varepsilon^2} \leq \frac{1-\phi+\phi\beta}{1-\phi^2} \stackrel{\Delta}{=} x > 0$$

$$\frac{1-\varepsilon+\varepsilon\beta}{1-\varepsilon^2} \leq x \iff$$

$$1-\varepsilon+\varepsilon\beta \leq x - x\varepsilon^2 \iff$$

$$x\varepsilon^2+\varepsilon\beta-\varepsilon+1-x \leq 0 \iff$$

$$x\varepsilon^2-\varepsilon(1-\beta)+1-x \leq 0$$



o mínimo valor de ε possível quando dotado é $1+\phi$

Precisamos que: $\quad \varepsilon \geq \dfrac{(1-\beta)-\sqrt{(1-\beta)^2-4x(1-x)}}{2x}$

e também $\quad \varepsilon \leq \dfrac{(1-\beta)+\sqrt{(1-\beta)^2-4x(1-x)}}{2x}$ na condição 1

Também precisamos garantir que a restrição de implementabilidade é satisfeita quando a dotação do indivíduo é $1-\phi$

$$\frac{-1}{1-\varepsilon} + \beta \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon}\right) \geq$$

$$-\frac{1}{1-\phi} + \beta \cdot \sum_{s=t+1}^{\infty} \beta^{s-(t+1)} \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-\phi} - \frac{1}{1+\phi}\right)$$

Lado esquerdo:

$$\frac{-1}{1-\varepsilon} - \beta \cdot \frac{1}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)} = - \frac{(1+\varepsilon)(1-\beta) + \beta}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)}$$

$$= - \frac{1-\beta+\varepsilon-\varepsilon\beta+\beta}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)} = - \frac{1+\varepsilon-\varepsilon\beta}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)}$$

e o lado direito:

$$- \frac{1+\phi-\phi\beta}{(1-\varepsilon)(1-\beta)}$$

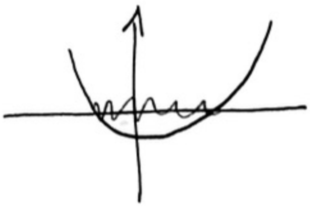
queremos:

$$- \frac{1+\varepsilon-\varepsilon\beta}{(1-\varepsilon^2)(1-\beta)} \geq - \frac{1+\phi-\phi\beta}{(1-\phi^2)(1-\beta)} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{1+\varepsilon-\varepsilon\beta}{(1-\varepsilon^2)} \le \frac{1+\phi-\phi\beta}{1-\phi^2} \stackrel{\Delta}{=} y > 0$$

$$\Leftrightarrow 1+\varepsilon-\varepsilon\beta \le y - y\varepsilon^2$$

$$\Leftrightarrow y\varepsilon^2 + \varepsilon(1-\beta) + 1 - y \le 0$$



Condição 2: $\varepsilon \geq \dfrac{-(1-\beta) - \sqrt{(1-\beta)^2 - 4y(1-y)}}{2y} < 0$

e $\varepsilon \leq \dfrac{-(-1-\beta) + \sqrt{(1-\beta)^2 - 4y(1-y)}}{2y}$

ϕ	x	y	ε^1_{min}	ε^1_{MAX}	ε^2_{min}	ε^2_{MAX}
0,40	0,95	1,43	0,13	0,40	-0,75	0,40
0,45	0,97	1,54	0,06	0,45	-0,78	0,45
0,50	1	1,67	0	0,50	-0,80	0,50

Logo, para $\phi = 0{,}40$, a solução para o problema restrito do planejador central é $\varepsilon = 0{,}13$

Para $\phi = 0{,}45$, $\varepsilon = 0{,}06$.

Para $\phi = 0{,}50$, $\varepsilon = 0$ (uma conclusão que chegamos no final do item b).

e) A medida que ϕ aumenta, ε diminui, a ponto de para $\phi \geq 0{,}50$, a solução do planejador central de a) passa a ser implementável. ϕ maior — maior mudança na renda do indivíduo → aversão ao risco → mais fácil "convencer" indivíduo a aceitar solução do planejador irrestrito (menor ε)