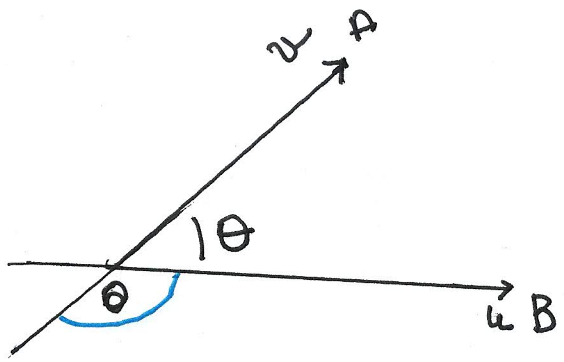
PRODUTO INTERNO EM $\mathbb{R}^n$.

Para obtermos exemplos importantes de transformações matriciais "geométricas" em $\mathbb{R}^n$ vamos introduzir a noção de produto interno em $\mathbb{R}^n$, que é a generalização do produto escalar de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Isto é, vamos introduzir "geometria" em $\mathbb{R}^n$ através de uma ferramenta que nos possibilita calcular comprimento de vetores e ângulo entre vetores.

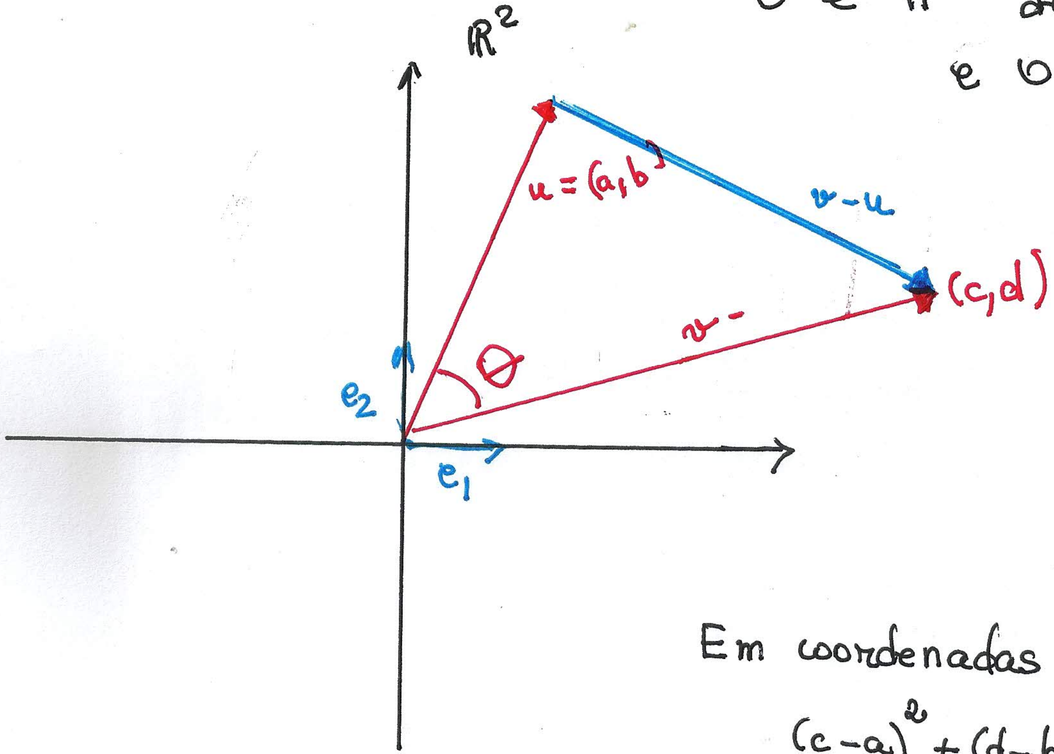
Vamos agora "traduzir" a Lei dos Cossenos usando coordenadas de vetores em $\mathbb{R}^2$.



Temos 2 ângulos entre as retas OA e OB, onde $\vec{OA} = v$ e $\vec{OB} = u$.

$ang(u,v) \overset{def}{=} \theta$ se $\theta \in [0, \pi]$

ou seja, por definição o ângulo entre os vetores u e v é o ângulo entre 0 e π determinado pelas retas OA e OB. (u e v vetores não nulos)



$$v - u = (c,d) - (a,b) = (c-a, d-b)$$

Pela Lei dos Cossenos,

$$\|v-u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\|u\|\,\|v\|\cos\theta$$

$\|u\| = \sqrt{a^2+b^2}$, é o comprimento do vetor u.

Em coordenadas:

$$(c-a)^2 + (d-b)^2 = c^2 + d^2 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\cos\theta$$

Pelas contas aí, temos que

$$-2ac - 2bd = -2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\cos\theta$$

ou seja $\boxed{ac + bd = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\cos\theta}$

Note que $\theta = \frac{\pi}{2} \iff ac + bd = 0$.

Veja agora como fazemos em Álgebra Linear, com inspiração no que foi feito aí.

Definimos uma função

$$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{por}$$

$$(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$$

por

Se $u = (x_1, \dots, x_n)$, $v = (y_1, \dots, y_n)$ então

$$\boxed{\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .}$$

$\langle \, , \, \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^n$, generalização do produto escalar

É claro que o produto interno definido acima satisfaz as propriedades a seguir:

P1: $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$.

P2: Para todos $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

P3: Para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

P4: $\langle v, v \rangle \geqslant 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n$. $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.

P5: $\langle a u, v \rangle = \langle u, a v \rangle = a \langle u, v \rangle \ \forall a \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}^n$.

É claro que de P_2 e P_3 vem que

$$\langle w, u+v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle \ \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, $u \in \mathbb{R}^n$.

MÓDULO OU NORMA de u

Note que $\|u\| = 0 \iff u = 0$.

Vale que $\|a u\| = |a| \, \|u\| \ \forall a \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^n$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$\forall\ u, v \in V,\quad |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$

Para demonstrar essa desigualdade procedemos assim:

Seja $x \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$,

$$0 \leq \langle xu+v, xu+v\rangle = x^2\|u\|^2 + 2x\langle u,v\rangle + \|v\|^2.$$

Logo $\|u\|^2 x^2 + 2\langle u,v\rangle x + \|v\|^2 \geq 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Então $\Delta = 4(\langle u,v\rangle)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$.

$$\Rightarrow 4(\langle u,v\rangle)^2 \leq 4\|u\|^2\|v\|^2$$

$$\Rightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|.$$

(Note que se $u = v = 0$, então obviamente vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz!)

Se u e v são vetores não nulos, da Desigualdade de Cauchy-Schwarz tiramos que

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1 \iff$$

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1$$

Logo, existe um único ângulo θ, com $0 \leq \theta \leq \pi$ tal que

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}}.$$

Definimos então θ como sendo $\boxed{\mathrm{ang}(u, v)}$.

Definimos então

$$\text{ang}(u,v) = \begin{cases} \theta & \text{tq } \cos\theta = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{se } u = 0 \text{ ou } v = 0. \end{cases}$$

ângulo entre u e v

Note que $\langle u, v\rangle = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$, no caso em que $u \neq 0$ e $v \neq 0$.

Definimos então

$u \perp v$ se e só se $\langle u, v\rangle = 0$.

Note que 0 é ortogonal a qualquer vetor.

Com essas definições, temos o produto escalar em $\mathbb{R}^2$:

$$\langle u, v \rangle = ac + bd \quad \text{se} \quad u = (a,b) \text{ e } v = (c,d)$$

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \, \|v\| \cos\theta \qquad \text{com } 0 \leq \theta \leq \pi$$

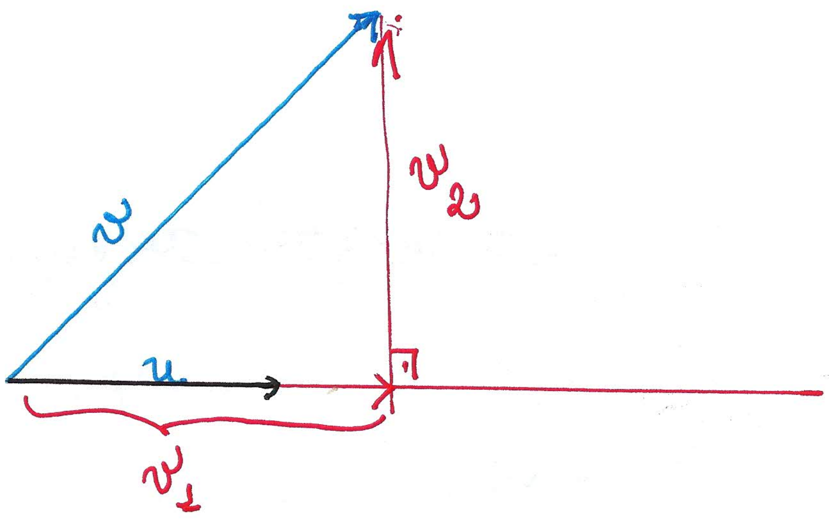
e $\quad u \perp v \iff \langle u, v \rangle = 0.$

$$\|u\| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{a^2+b^2}$$

Projeção Ortogonal em um vetor $u \neq 0$.

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$. Queremos escrever

$v = v_1 + v_2$ onde v_1 é paralelo a u e $v_2 \perp u$.



DEF:

$$\mathrm{proj}_u v \overset{\text{def}}{=} v_1$$

↳ PROJEÇÃO ORTOGONAL de v em u

$$v_1 \parallel u \underset{u \neq 0}{\Longrightarrow} \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ tq } v_1 = \alpha u .$$

Logo $v = \alpha u + v_2$. Queremos calcular α.

$$\langle u, v \rangle = \alpha \langle u, u \rangle + \underbrace{\langle v_2, u \rangle}_{=0}$$ pois queremos $v_2 \perp u$.

$$\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} \quad \text{e} \quad \mathrm{proj}_u v = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2}\, u .$$

TRANSFORMAÇÕES LINERES "GEOMÉTRICAS" de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

(1) Projeção Ortogonal

Seja $u = (a, b) \neq 0$ e

$v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{proj}_u^{\,v} = \frac{\langle u, v \rangle}{\| u \|^2} u = \frac{\langle (a,b), (x,y) \rangle}{a^2 + b^2}(a, b)$$

$$= \frac{ax + by}{a^2 + b^2}(a, b)$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} x + \frac{ab}{a^2+b^2} y, \ \frac{ab}{a^2+b^2} x + \frac{b^2}{a^2+b^2} y \right)$$

$$\left[\text{proj}_u^{\,v} \right]_{can} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} = A$$

$$\mathrm{proj}_u v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathrm{proj}_u v = T_A \quad \text{onde} \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Im}\, T_A = \left[\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2}\right)\right] = \left[(a,b)\right]$$

$$\mathrm{Ker}\, T_A = ?$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{L1}{a}} \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 - bL1} \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$u \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ ou $b \neq 0$

Vamos supor que $a \neq 0$, o caso $b \neq 0$ é análogo

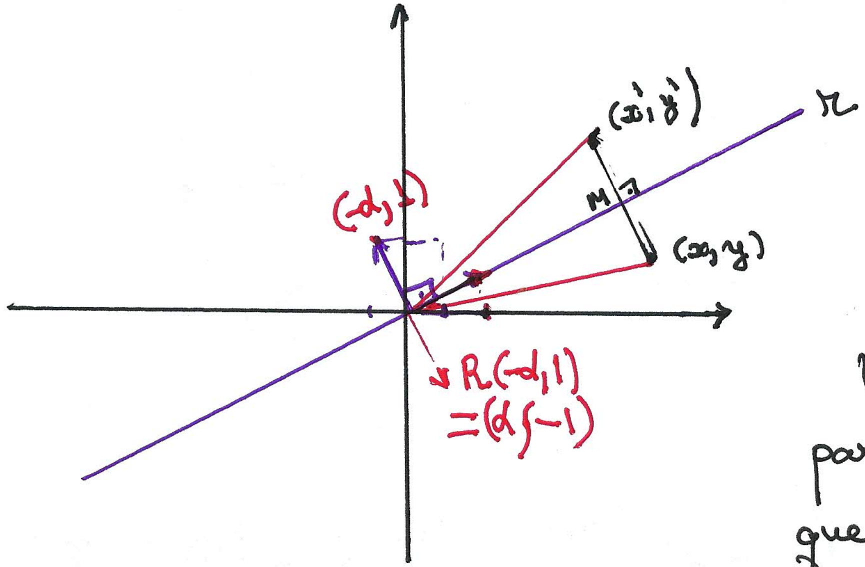
$$\mathrm{Ker}\, T_A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{a}{a^2+b^2}x + \frac{b}{a^2+b^2}y = 0 \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0 \right\}$$

$ax + by \neq 0$ e $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} y$

Logo $\mathrm{Ker}\, T_A = \left[\left(-\frac{b}{a}, 1\right)\right] = \left[(-b, a)\right]$

(2) Reflexão em torno da reta $y = \alpha x$, $\alpha \neq 0$.



$$R(x,y) = (x', y')$$

$$M = r \cap s = \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$$

Usando geometria analítica para fazer as contas temos que

$$x' = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}x + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}y$$

$$y' = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}x + \frac{(\alpha^2-1)}{1+\alpha^2}y$$

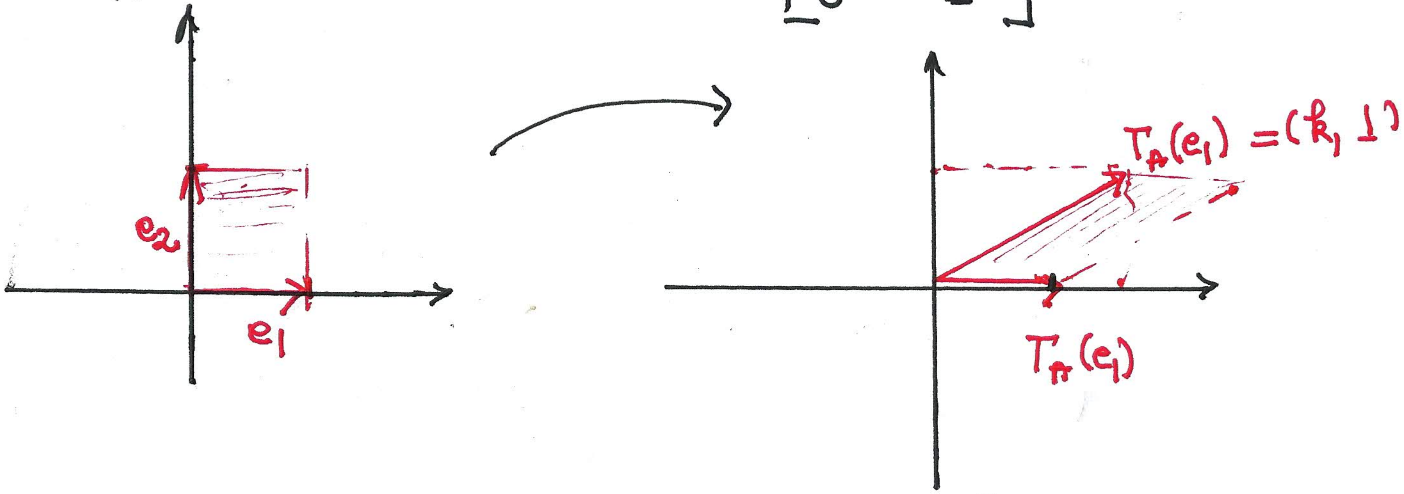
$$[R]_{can,can} = \begin{bmatrix} \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} & \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \\ \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} & \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2} \end{bmatrix}$$

Note que $R(1,\alpha) = \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} + \frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}, \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{(\alpha^2-1)\alpha}{1+\alpha^2}\right)$

$= (1, \alpha)$ como era de se esperar!

$$R(-\alpha, 1) = \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\cdot(-\alpha) + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}, \frac{-2\alpha^2}{1+\alpha^2} + \frac{\alpha^2-1}{1+\alpha^2}\right) = (\alpha, -1)$$

$T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



$k > 0$

$T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \ , \quad k > 0$