PNV 3421 _ Processos Estocásticos

Notas de Aula - Teoria de Filas 26/11/2020

Comentários Finais

1 _ Distribuição de intervalos entre saídas consecutivas de uma fila M/M/1

Complementando o desenvolvimento apresentado na página 15 das Notas de Aula de 19/11/2020, para o caso em que um cliente, ao sair, deixa o servidor ocioso, a distribuição do intervalo até a próxima saída é a seguinte:

$$P[U \le t] = \int_0^t (1 - e^{-\mu(t-t')}) \lambda e^{-\lambda t'} dt' =$$

$$= 1 - \frac{\mu}{\mu-\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{\lambda}{\mu-\lambda} e^{-\mu t}$$

E, em consequência, a função densidade de probabilidade do intervalo até a próxima saída tem a expressão:

$$f_{U/0}(t) = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} e^{-\mu t} \qquad (1)$$

A expressão se aplica apenas aos casos em que, à saída de um cliente, não sobra nenhum cliente no sistema, evento que tem probabilidade d_0. Para os demais casos, que ocorrem com probabilidade $(1-d_0)$, a distribuição do intervalo entre duas saídas consecutivas é exponencial com média $1/\mu$. Assim, a distribuição não condicional dos intervalos entre saídas consecutivas é dada por:

$$f_V(t) = d_0 f_{V/0}(t) + (1-d_0) f_{V/>0}(t) \qquad (2)$$

Como para filas com chegadas e atendimentos individuais, $a_j = d_j$ e para filas com chegada Poisson, $a_j = p_j$ (fatos mostrados nas Notas de Aula de 19/11/2020), de (2) resulta:

$$f_V(t) = p_0 f_{V/0}(t) + (1-p_0) f_{V/>0}(t) =$$

$$= (1-\rho)\left(\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} e^{-\mu t}\right) + \rho\mu e^{-\mu t} =$$

$$= \frac{\mu-\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} e^{-\mu t}\right) + \lambda e^{-\mu t} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\mu t} + \lambda e^{-\mu t} = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (3)$$

Isto é, a distribuição não condicional (marginal) dos intervalos entre saídas consecutivas de uma fila M/M/1 é exponencial com média $1/\lambda$ (em regime estacionário)

2 - Encaminhamento da Resolução da Questão 7 da 3ª Série de Problemas

Estudo do processo estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ em que $N(t)$ é o número de máquinas com avaria no instante t

a) - Espaço de estados $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

b) Seja $\{MO(t), t \geq 0\}$ o número de máquinas operando no instante t

$MO(t) = 7$ para $0 \leq N(t) \leq 3$, e

$MO(t) = 10 - N(t)$, $4 \leq N(t) \leq 10$

c) Diagrama das taxas de transição

c1 - taxas de transição para frente (aumento do número de máquinas com avaria)

Se $MO(t) = j$, isto é há j máquinas em operação no instante t e o intervalo até a próxima avaria em cada uma das máquinas é exponencial com média $1/\lambda$, então o intervalo até a próxima avaria no conjunto de j máquinas é exponencial com média $1/j\lambda$ e a taxa para frente é $j\lambda$. A taxa para frente é proporcional ao número de máquinas em operação.

c2 - taxas de transição para trás (redução do número de máquinas com avaria)

Seja NR o número de equipes de reparo (admitindo-se que cada equipe de reparo faz a manutenção de uma máquina) e $\{MR(t), t \geq 0\}$ o número de máquinas em reparo no instante t.

$$MR(t) = \min\{N(t), NR\}$$

Como o tempo de reparo de qualquer máquina é exponencial com média $1/\mu$, se $MR(t)=j$, o intervalo de tempo até o instante em que uma dessas j máquinas esteja reparada é exponencial com média $1/j\mu$ e a taxa para trás é $j\mu$. A taxa para trás é proporcional ao número de máquinas em reparo.

A Figura 1 mostra o diagrama das taxas de transição para a Questão 7 da 3ª Série de Problemas.

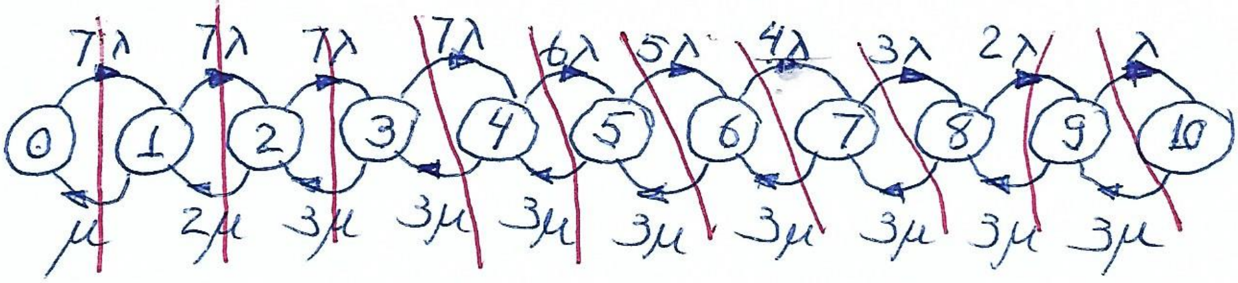


Figura 1 _ Diagrama das taxas de transição para a Questão 7 da 3ª Série de Problemas

d) Equações de equilíbrio para cada estado em regime estacionário.

d1 _ Estado 0 $\quad 7\lambda p_0 = \mu p_1 \quad (4)$

d2 _ Estado 1 $\quad (7\lambda+\mu) p_1 = 7\lambda p_0 + 2\mu p_2 \quad (5)$

d3 _ Estado 2 $\quad (7\lambda+2\mu) p_2 = 7\lambda p_1 + 3\mu p_3 \quad (6)$

d4 _ Estado 3 $\quad (7\lambda+3\mu) p_3 = 7\lambda p_2 + 3\mu p_4 \quad (7)$

d5 _ Estado 4 $\quad (6\lambda+3\mu) p_4 = 7\lambda p_3 + 3\mu p_5 \quad (8)$

d6 _ Estado 5 $\quad (5\lambda+3\mu) p_5 = 6\lambda p_4 + 3\mu p_6 \quad (9)$

d7 _ Estado 6 $\quad (4\lambda+3\mu) p_6 = 5\lambda p_5 + 3\mu p_7 \quad (10)$

d8 _ Estado 7 $\quad (3\lambda+3\mu) p_7 = 4\lambda p_6 + 3\mu p_8 \quad (11)$

d9 _ Estado 8 $\quad (2\lambda+3\mu) p_8 = 3\lambda p_7 + 3\mu p_9 \quad (12)$

d10 _ Estado 9 $\quad (\lambda+3\mu) p_9 = 2\lambda p_8 + 3\mu p_{10} \quad (13)$

A equação para o estado 10 é redundante; com as equações (4) a (13) mais a equação $\sum_{j=0}^{10} p_j = 1$, são calculados os valores das probabilidades estacionárias p_j, $j = 0, 1, \ldots 10$.

Convém reescrever o sistema de equações (5) a (13).
Somando-se as equações (4) e (5), obtém-se:

$$7\lambda p_1 = 2\mu p_2 \quad (5')$$

Somando-se as equações (4), (5) e (6), obtém-se

$$7\lambda p_2 = 3\mu p_3 \quad (6')$$

Somando-se as equações (4), (5), (6) e (7), obtém-se

$$7\lambda p_3 = 3\mu p_4 \quad (7')$$

e, assim, sucessivamente:

$$6\lambda p_4 = 3\mu p_5 \quad (8')$$

$$5\lambda p_5 = 3\mu p_6 \quad (9')$$

$$4\lambda p_6 = 3\mu p_7 \quad (10')$$

$$3\lambda p_7 = 3\mu p_8 \quad (11')$$

$$2\lambda p_8 = 3\mu p_9 \quad (12')$$

$$\lambda p_9 = 3\mu p_{10}. \quad (13')$$

As equações (5') a (13') têm a mesma forma que a equação (4) e correspondem a um equilíbrio de probabilidades atravessando um corte separando 2 estados vizinhos, conforme indicado na Figura 1, em vermelho. Com este novo sistema de equações, fica mais fácil escrever cada p_j em função de p_0 e depois utilizar a equação $\sum_{j=0}^{10} p_j$ para calcular p_0..

e) Cálculo da produção média diária, PMD

$$PMD = 200\,\overline{MOD}$$

em que $\overline{MOD}$ é o numero médio diário de máquinas em operação.

$$\overline{MOD} = 7(p_0 + p_1 + p_2 + p_3) + \sum_{j=4}^{10} (10-j)\,p_j$$

f) Índice médio de ocupação dos operadores das máquinas, IMOO

$$IMOO = \frac{7}{7}(p_0 + p_1 + p_2 + p_3) + \sum_{j=4}^{10} \frac{(10-j)}{7}\,p_j$$

9) Índice médio de ocupação das equipes de reparo, IMOR

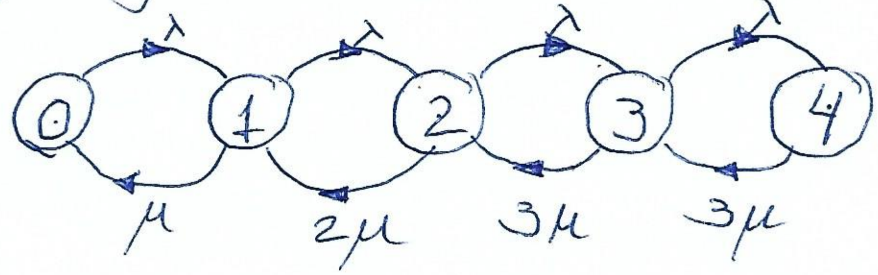
$$IMOR = \frac{0}{3} p_0 + \frac{1}{3} p_1 + \frac{2}{3} p_2 + \frac{3}{3} \sum_{j=3}^{10} p_j$$

3_ Encaminhamento da Resolução da Questão 6 da 3ª Série de Problemas

Estudo do processo $\{N(t), t \geq 0\}$ em que $N(t)$ é o número de navios no terminal principal no instante t.

a) espaço de estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) diagrama das taxas de transição



c) Equações de equilíbrio para as probabilidades estacionárias

Utilizando o balanço de probabilidades em cortes separando dois estados do diagrama das ta_ xas de transição, como mostrado para a Questão 7, resultam as seguintes equações

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$
$$\lambda p_1 = 2\mu p_2$$
$$\lambda p_2 = 3\mu p_3$$
$$\lambda p_3 = 3\mu p_4$$

que, com a equação $\sum_{j=0}^{4} p_j = 1$, permitem obter os valores de p_0, p_1, p_2, p_3 e p_4.

d) Número médio de navios no terminal principal, L.

$$L = \sum_{j=0}^{4} j\, p_j$$

e) Taxa média de chegada ao terminal secundário

Um navio é encaminhado ao terminal secundário quando ele chega e encontra 4 navios no terminal. Como o processo de chegada de navios é Poisson, a probabilidade de um navio, ao chegar, encontrar, em regime estacionário, 4 navios no termi nal, a_4, é igual à probabilidade de haver 4 navios no terminal em regime estacionário, p_4. Assim, uma fração p_4 da demanda λ é encaminhada ao terminal secundário

f) Tempo médio de permanência no terminal principal

Para a aplicação da fórmula de Little, somente devem ser considerados os navios atendidos no terminal principal. Assim,

$$L = \lambda(1-p_4)\, W$$