

$$\begin{aligned}
y &= M^{-1}(\phi + Nu) = M^{-1}(\Delta_N p - \Delta_M q + Nu) = \\
&= M^{-1}\Delta_N u - M^{-1}\Delta_M y + M^{-1}Nu \quad (10.1)
\end{aligned}$$

de modo que:

$$(I + M^{-1}\Delta_M)y = M^{-1}\Delta_N u + M^{-1}Nu \quad (10.2)$$

Multiplicando-se ambos os lados por M pela esquerda, temos:

$$(M + \Delta_M)y = (N + \Delta_N)u \quad (10.3)$$

o que resulta em:

$$y = \underbrace{(M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N)}_{G_p} u \quad (10.4)$$

Para se ter robustez de estabilidade, vamos supor o pior caso, que ocorre quando Δ_M e Δ_N são matrizes cheias. Neste caso, a condição advinda do teorema do pequeno ganho é necessária e suficiente. Deste modo:

$$p = Ky = KM^{-1}(\phi + Nu) = KM^{-1}\phi + K \underbrace{M^{-1}N}_{G} p$$

de onde se pode tirar:

$$p = (I - KG)^{-1}KM^{-1}\phi = K(I - GK)^{-1}M^{-1}\phi = KSM^{-1}\phi$$

Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}
q &= M^{-1}(\phi + Nu) = M^{-1}\phi + Gp = M^{-1}\phi + G(I - KG)^{-1}KM^{-1}\phi = \\
&= [I + G(I - KG)^{-1}K]M^{-1}\phi = [I + (I - GK)^{-1}GK]M^{-1}\phi \quad (10.5)
\end{aligned}$$

onde $S - T = I$, o que resulta em:

$$q = [I + T]M^{-1}q = SM^{-1}\phi$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} KSM^{-1} \\ SM^{-1} \end{bmatrix} \phi$$

Deste modo, o sistema em malha fechada fica reduzido ao sistema apresentado na Fig. 10.2. Pelo teorema do pequeno ganho, temos que se $\|[\Delta_N - \Delta_M]\| < \epsilon$, então:

$$\gamma_K = \left\| \begin{bmatrix} KSM^{-1} \\ SM^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < \frac{1}{\epsilon}$$

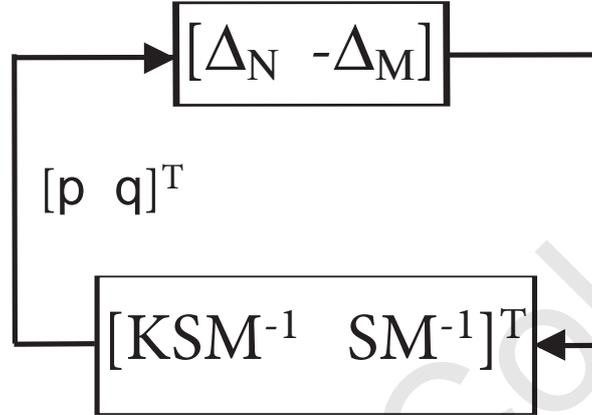


Figura 10.2: Diagrama de Blocos para H_∞ Loop Shaping

10.2 Maximização da Robustez de Estabilidade

Deste modo, se queremos maximizar a robustez de estabilidade, devemos ter ϵ o maior possível, o que significa minimizar γ_K dentre todos os controladores estabilizantes.

Dada uma planta nominal $G = M^{-1}N$, queremos projetar um controlador K que maximize a robustez de estabilidade. Nesta metodologia, é possível se calcular o menor valor de γ_K que pode ser atingido, que é dado por:

$$\gamma_{\min} = \sqrt{1 - \|[N \ M]\|_H^2} = \sqrt{1 + \rho(XZ)}$$

onde $\|\cdot\|_H$ é a norma de Hankel, e X e Z são soluções das EAR:

$$(A - BS^{-1}D^TC)Z + Z(A - BS^{-1}D^TC) - ZC^TR^{-1}CZ + BS^{-1}B^T = 0$$

onde $R = I + DD^T$ e $S = I + D^TD$ e

$$(A - BS^{-1}D^TC)^TX + X(A - BS^{-1}D^TC) - XBS^{-1}B^TX + C^TR^{-1}C = 0$$

onde se nota que ambas as equações não dependem de γ .

Deste modo, o que se busca é um controlador subótimo tal que $\gamma_{\min} \leq \gamma$, e o correspondente controlador central é?

$$K(s) = \left[\frac{A + BF + \gamma^2(L^T)^{-1}ZC^T(C + DF)}{B^TX} \mid \frac{\gamma^2(L^T)^{-1}ZC^T}{-D^T} \right]$$

com $F = -S^{-1}(D^TC + B^TX)$ e $L = (1 - \gamma^2)I + XZ$.

10.3 Especificações de Desempenho

Para que se possa atender especificações de desempenho, costuma-se projetar pré e pós compensadores para a planta $G(s)$ de modo que a planta estendida se torna $G_s = W_1GW_2$. O sistema em malha fechada para objetivos de projeto é apresentado na Fig. 10.3. Esta planta estendida deve ter as características desejadas em malha aberta. Em seguida, é projetado um controlador para esta planta estendida que garanta robustez de estabilidade máxima (ou bem próximo disso) para as incertezas Δ_M e Δ_N . O controlador é projetado de tal forma que γ se aproxime de γ_{\min} .

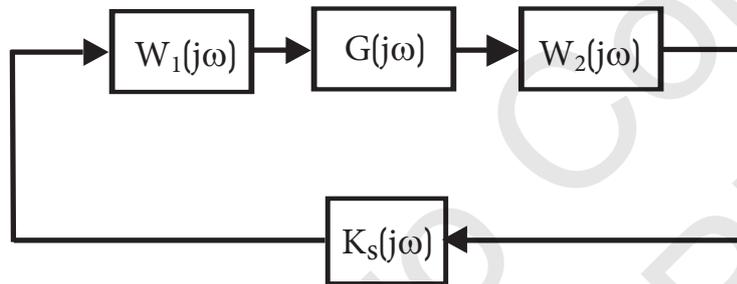


Figura 10.3: Diagrama de Blocos da Planta Estendida e Controlador

Pode-se mostrar que se $\epsilon \geq 2$, a resposta em frequência de $W_2GW_1K_s$ (projetado para robustificar W_2GW_1) é similar a de W_2GW_1 , de modo que o projeto pode ser separado nas duas etapas da forma descrita acima. Se ϵ ficar muito grande, possivelmente o projeto será conservador e o desempenho será ruim. O controlador final é então:

$$K_{\text{final}}(s) = W_1(s)K_S(s)W_2(s)$$

Se queremos melhorar o desempenho para rastreamento, o diagrama de blocos a ser considerado é apresentado na Fig. 10.4, onde o bloco $K_s(0)W_2(0)$ foi adicionado para este fim.

O controlador H_∞ Loop-Shaping também possui uma estrutura de separação, que é:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= Ax + H(C\hat{x} - y) + Bu \\ u &= K\hat{x} \end{cases}$$

onde $H = ZC^T$ e $K = -B^T[I - \gamma^{-2}I - \gamma^{-2}XZ]^{-1}X$ e onde a planta estendida W_1GW_2 , já com o formato dos valores singulares que atende às especificações, tem a representação em espaço de estados:

$$G_S(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

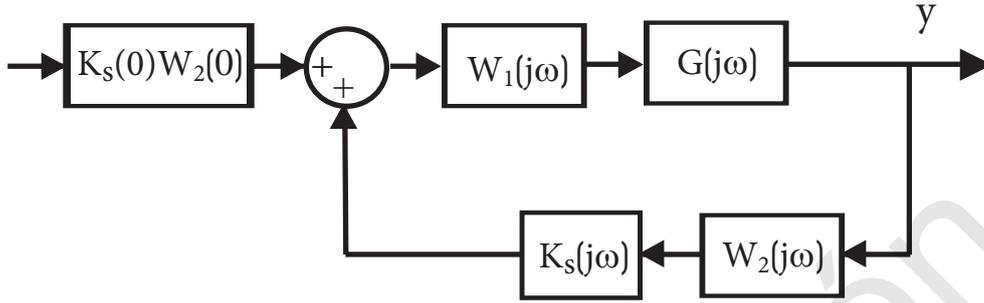


Figura 10.4: Diagrama de Blocos da Planta Estendida e Controlador para Rastreamento

Nesta técnica de projeto, podemos utilizar as identidades apresentadas no exemplo da seção 7.2. Desta forma, temos os seguintes parâmetros a nos guiar no processo de projeto:

1. Vale a seguinte propriedade relacionando os valores singulares de L (MFTMA) e S (função sensibilidade):

$$\underline{\sigma}(L) - 1 \leq \frac{1}{\bar{\sigma}(S)} \leq \underline{\sigma}(L) + 1 \quad (10.6)$$

de modo que quando $\underline{\sigma}(L) \gg 1$, teremos que $\bar{\sigma}(S) \simeq \frac{1}{\underline{\sigma}(L)}$

2. Por definição, temos que a banda-passante ω_B para um sistema MIMO é dada por $\bar{\sigma}(S(j\omega_B)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, de modo que pela identidade (10.6), temos que $0.41 < \underline{\sigma}(L(j\omega_B)) < 2.41$, ou ainda, em decibéis:

$$-7.74 < 20 \log |\underline{\sigma}(L(j\omega_B))| < 7.64$$

3. É interessante também a informação que:

$$|\bar{\sigma}(S) - \bar{\sigma}(T)| \leq \bar{\sigma}(S + T) = \bar{\sigma}(I) = 1 \leq \bar{\sigma}(S) + \bar{\sigma}(T)$$

que vem do fato de $\bar{\sigma}$ ser uma norma. Deste modo, quando $\bar{\sigma}(S)$ é pequena, temos $\bar{\sigma}(T) \simeq 1$.

4. Se A e B são matrizes quaisquer não singulares, temos que $\underline{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) \leq \bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B)$, de modo que para $T = LS$, temos $\underline{\sigma}(L)\bar{\sigma}(S) \leq \bar{\sigma}(T) \leq \bar{\sigma}(L)\bar{\sigma}(S)$, o que resulta em:

$$\underline{\sigma}(L) \leq \bar{\sigma}(T) \leq \bar{\sigma}(L)$$

5. Como $\underline{\sigma}(A)\underline{\sigma}(B) \leq \underline{\sigma}(AB)$, então:

$$\underline{\sigma}(L)\underline{\sigma}(S) \leq \underline{\sigma}(T) \Rightarrow \underline{\sigma}(L) \leq \underline{\sigma}(T)$$

como $\underline{\sigma}(S) \simeq 1$ para altas frequências, o que resulta em:

$$\underline{\sigma}(L) \leq \underline{\sigma}(T) \leq \bar{\sigma}(T) \leq \bar{\sigma}(L)$$

A partir destas identidades, supondo que iremos garantir que $\epsilon \geq 0.2$, podemos assumir que $L = W_2GW_1K_s = W_2GW_1$. Deste modo, as especificações de desempenho podem ser dadas em termos de *barreiras de desempenho*, como apresentada na Fig. 10.5.

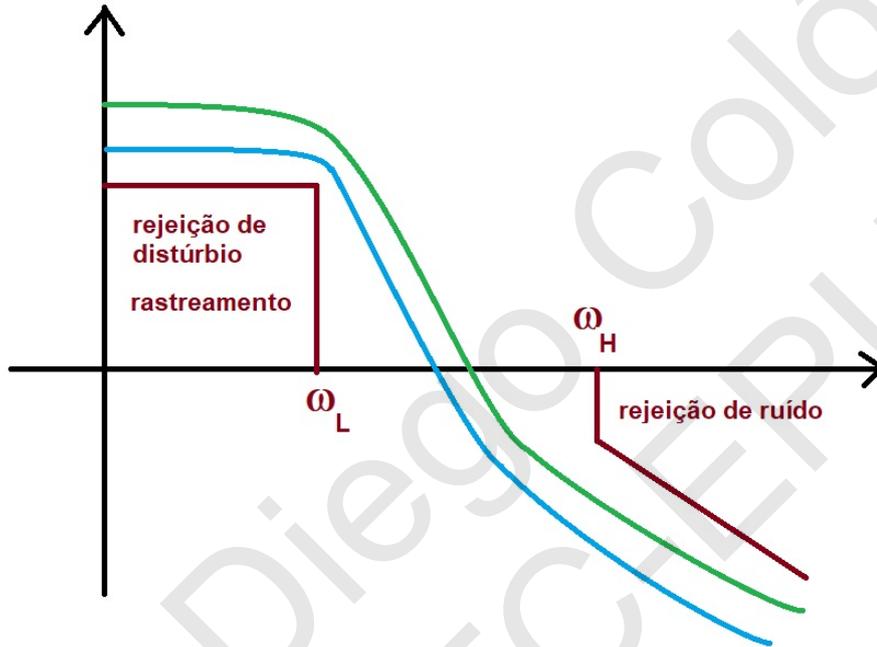


Figura 10.5: Barreiras de Desempenho para H_∞ Loop Shaping

Referências Bibliográficas

- [dC96] José Jaime da Cruz. *Controle Robusto Multivariável*. Editora da Universidade de São Paulo, 1996.
- [DLCBS18] P.B. De Lauro Castrucci, A. Bittar, and R.M. Sales. *Controle Automático*. LTC, 2018.
- [DP13] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Fer02] Pedro J. Fernandez. *Medida e Integração*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [FPC20] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. On the μ -analysis and synthesis of mimo lurie-type systems with application in complex networks. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, June 2020.
- [GPK14] D.W. Gu, P.H. Petkov, and M.M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB®*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2014.
- [Hes18] J.P. Hespanha. *Linear Systems Theory: Second Edition*. Princeton University Press, 2018.
- [Lju99] Lennart Ljung. *System Identification - Theory For the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., second edition, 1999.
- [Nis15] N.S. Nise. *Control Systems Engineering, 7th Edition*. Wiley, 2015.
- [Oga11] K. Ogata. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011.
- [PC19] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. An application of the lurie problem in hopfield neural networks. In Agenor de T. Fleury, Domingos A. Rade, and Paulo R. G. Kurka, editors, *Proceedings of DINAME 2017*, pages 371–382, Cham, 2019. Springer International Publishing.
- [SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Wiley, 2005.
- [SPS98] R.S. Sánchez-Peña and M. Sznaiier. *Robust systems theory and applications*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. John Wiley, 1998.
- [ZD98] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Modular Series for Eng. Prentice Hall, 1998.
- [ZDG95] Khemin Zhou, John C. Doyle, and Keith Glover. *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1995.