

Controle H_∞ - Aula 11

Prof. Diego Colón

25 de novembro de 2020

Análise de Robustez de Desempenho 1

Conforme foi visto anteriormente, o sistema em malha fechada (ou seja, já levando em conta o controlador projetado) com as incertezas incluídas, é representado na Fig. ??, e a relação entre entradas externas e saídas de desempenho é dada por:

$$z = \underbrace{[N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12} + N_{22}]}_{\mathcal{F}_u(N,\Delta)} w$$

Para que tenhamos robustez de desempenho, devemos ter:

$$\|\mathcal{F}_u(N, \Delta)\|_\infty < 1$$

para qualquer Δ , o que é a mesma coisa que dizer que:

$$\|z\|_2 \leq \|\mathcal{F}_u(N, \Delta)\|_\infty \|w\|_2 < \|w\|_2$$

ou seja, o efeito nos erros de desempenho é diminuído.

As piores entradas externas são aquelas da forma $w = \Delta_p^* z$, ou seja, que produzem uma entrada externa que instabiliza o sistema em malha fechada. Para tanto, o sinal externo teria que de algum modo depender da saída de desempenho do sistema, que ficaria cada vez com maior amplitude, de maneira que a energia aumentasse sem parar. Isto significa que o sistema apresentado em Fig. 1 teria que ser instável.

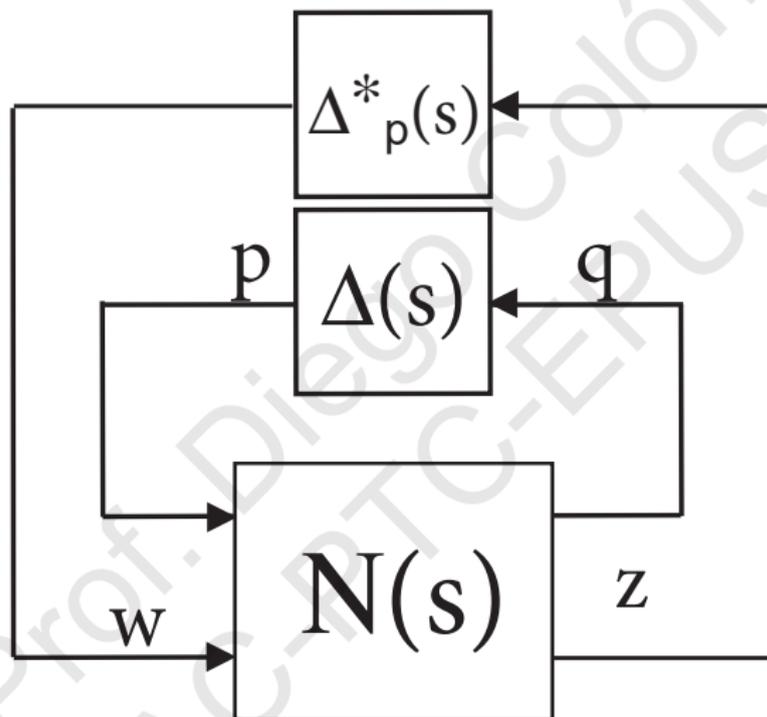


Figura: Diagrama de Blocos para Análise de Robustez de Desempenho

Para ser ter instabilidade, seria necessário que para algum Δ_p^* e algum ω tivéssemos:

$$\det(I - \mathcal{F}_u(N, \Delta)\Delta_p^*) = 0$$

De modo a não se ter instabilidade, devemos ter que

$$\det(I - \mathcal{F}_u(N, \Delta)\Delta_p) \neq 0 \quad (1)$$

para qualquer Δ_p e qualquer ω , o que obriga que Δ_p seja complexa e cheia no caso mais geral. Como sabemos que (1) equivale a $\mu_{\Delta_p}(\mathcal{F}_u) = \bar{\sigma}(\mathcal{F}_u) < 1$, o que implica que $\|\mathcal{F}_u\|_\infty < 1$. Esta estão é a condição de robustez de desempenho.

Uma maneira mais interessante de fazer esta análise é através da definição da matriz:

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix}$$

onde agora se envolve a matriz N inteira. Deste modo, temos o seguinte teorema:

Teorema

O sistema na Fig. 1 terá robustez de desempenho se e somente se:

$$\mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1$$

Demonstração.

Uma ideia da prova na ida é: Sabemos que

$$\mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1 \Leftrightarrow \det(I - N\hat{\Delta}) \neq 0$$

para qualquer $\hat{\Delta}$ tal que $\hat{\sigma}(\hat{\Delta}) \leq 1$. Deste modo:

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix} \right\} =$$
$$\det \begin{bmatrix} I - N_{11}\Delta & -N_{12}\Delta_p \\ -N_{21}\Delta & I - N_{22}\Delta_p \end{bmatrix} \neq 0 \quad (2)$$



Pela fórmula de Schur, podemos escrever que este determinante é igual a:

$$\det(I - N_{11}\Delta) \det[I - N_{22}\Delta_p - N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}\Delta_p] = \det(I - N_{11}\Delta) \det(I - \mathcal{F}_u\Delta_p) \neq 0 \quad (3)$$

Deste modo, para que (2) seja $\neq 0$, é necessário e suficiente que:

- $\det(I - N_{11}\Delta) \neq 0 \Leftrightarrow \mu_{\Delta}(N_{11}) < 1$, para qualquer Δ (robustez de estabilidade) e;
- $\det(I - \mathcal{F}_u\Delta_p) \neq 0 \Leftrightarrow \mu_{\Delta_p}(\mathcal{F}_u) < 1$ (robustez de desempenho)

Deste modo, podemos unificar os critérios da seguinte forma:

- 1 Estabilidade nominal:** N deve ser internamente estável
- 2 Desempenho nominal:** $\bar{\sigma}(N_{22}) < 1$ para qualquer ω , além de estabilidade nominal;
- 3 Robustez de estabilidade:** $\mu_{\Delta}(N_{11}) < 1$, além de estabilidade nominal;
- 4 Robustez de desempenho:** $\mu_{\hat{\Delta}}(N) < 1$ para qualquer ω , além de estabilidade nominal

onde esta última condição já exige que haja robustez de estabilidade. Ainda Δ pode sempre ter uma estrutura diagonal e Δ_p sempre terá estrutura cheia e complexa.

Exemplos

Voltando ao último exemplo, supondo que $z = W_p w$, é possível mostrar que a matriz N é dada por:

$$N = \begin{bmatrix} -w_I T_I & -w_I K S \\ w_p S G & w_p S \end{bmatrix}$$

onde $T_I = KG(I + KG)^{-1}$ e $S = (I + GK)^{-1}$. Sabemos que se U é uma matriz unitária, então $\mu(N) = \mu(UN)$, de modo que se aplicarmos:

$$U = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

em N , teremos:

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} w_I T_I & w_I K S \\ w_p S G & w_p S \end{bmatrix}$$

Uma forma alternativa de representar incertezas em uma matriz de funções de transferência é aquele apresentado na Fig. 3. A planta nominal é representada na forma de uma *fatoração copríma*, ou seja: $G(j\omega) = M^{-1}(j\omega)N(j\omega)$, enquanto que as incertezas estão contidas nas matrizes Δ_N e Δ_M .

Forma Alternativa de Representar Incertezas 2

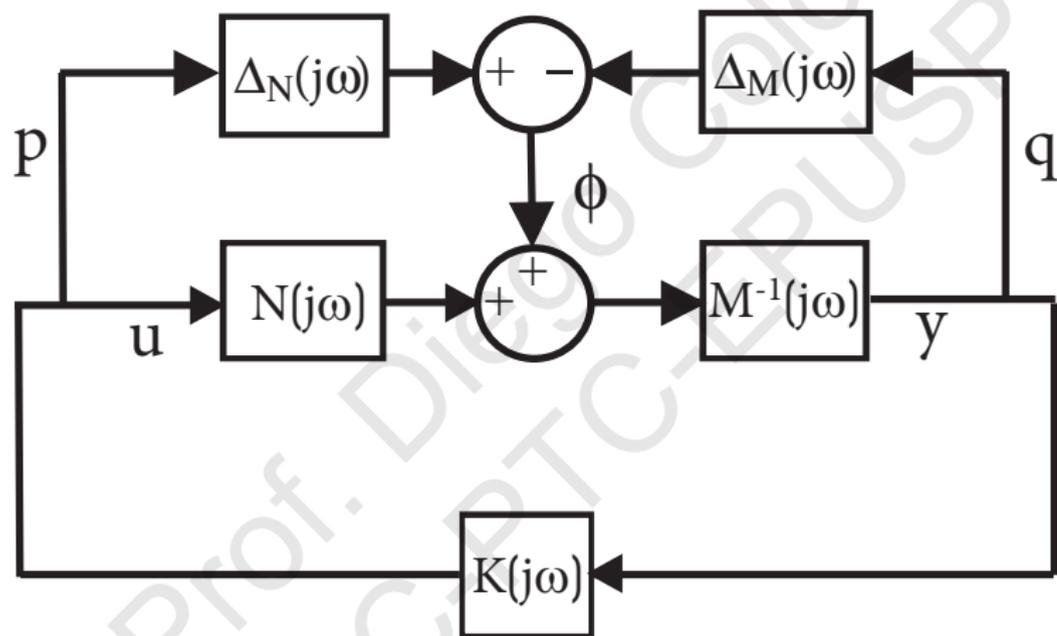


Figura: Diagrama de Blocos para H_∞ Loop-Shaping

Forma Alternativa de Representar Incertezas 3

Neste caso, é importante notar que a relimetação é positiva. Para deduzirmos o modelo completo da família de plantas, considere que $\phi = \Delta_N p - \Delta_M q$. Além disso:

$$\begin{aligned}y &= M^{-1}(\phi + Nu) = M^{-1}(\Delta_N p - \Delta_M q + Nu) = \\ &= M^{-1}\Delta_N u - M^{-1}\Delta_M y + M^{-1}Nu\end{aligned}\quad (4)$$

de modo que:

$$(I + M^{-1}\Delta_M)y = M^{-1}\Delta_N u + M^{-1}Nu\quad (5)$$

Multiplicando-se ambos os lados por M pela esquerda, temos:

$$(M + \Delta_M)y = (N + \Delta_N)u\quad (6)$$

Forma Alternativa de Representar Incertezas 4

O que resulta em:

$$y = \underbrace{(M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N)}_{G_p} u \quad (7)$$

Para se ter robustez de estabilidade, vamos supor o pior caso, que ocorre quando Δ_M e Δ_N são matrizes cheias. Neste caso, a condição advinda do teorema do pequeno ganho é necessária e suficiente. Deste modo:

$$p = Ky = KM^{-1}(\phi + Np) = KM^{-1}\phi + K \underbrace{M^{-1}N}_G p$$

de onde se pode tirar:

$$p = (I - KG)^{-1}KM^{-1}\phi = K(I - GK)^{-1}M^{-1}\phi = KSM^{-1}\phi$$

Além disso, temos que:

$$q = M^{-1}(\phi + Np) = M^{-1}\phi + Gp = M^{-1}\phi + G(I - KG)^{-1}KM^{-1}\phi = [I + G(I - KG)^{-1}K]M^{-1}\phi = [I + (I - GK)^{-1}GK]M^{-1}\phi \quad (8)$$

onde $S - T = I$, o que resulta em:

$$q = [I + T]M^{-1}q = SM^{-1}\phi$$

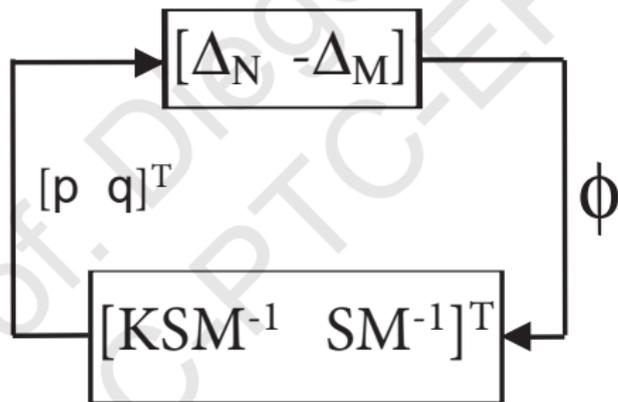
$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} KSM^{-1} \\ SM^{-1} \end{bmatrix} \phi$$

Deste modo, o sistema em malha fechada fica reduzido ao sistema apresentado na Fig. 3. Pelo teorema do pequeno ganho, temos que se $\|[\Delta_N - \Delta_M]\| < \epsilon$, então:

$$\gamma_K = \left\| \left[\begin{array}{c} KSM^{-1} \\ SM^{-1} \end{array} \right] \right\|_{\infty} < \frac{1}{\epsilon}$$

Maximização da Robustez de Estabilidade 1

Deste modo, se queremos maximizar a robustez de estabilidade, devemos ter ϵ o maior possível, o que significa minimizar γ_K dentre todos os controladores estabilizantes.



Maximização da Robustez de Estabilidade 2

Dada uma planta nominal $G = M^{-1}N$, queremos projetar um controlador K que maximize a robustez de estabilidade. Nesta metodologia, é possível se calcular o menor valor de γ_K que pode ser atingido, que é dado por:

$$\gamma_{\min} = \sqrt{1 - \|[NM]\|_H^2} = \sqrt{1 + \rho(XZ)}$$

onde $\|\cdot\|_H$ é a norma de Hankel, e X e Z são soluções das EAR:

$$(A - BS^{-1}D^T C)Z + Z(A - BS^{-1}D^T C) - ZC^T R^{-1} CZ + BS^{-1}B^T = 0$$

onde $R = I + DD^T$ e $S = I + D^T D$ e

$$(A - BS^{-1}D^T C)^T X + X(A - BS^{-1}D^T C) - XBS^{-1}B^T X + C^T R^{-1}C = 0$$

onde se nota que ambas as equações não dependem de γ .
Deste modo, o que se busca é um controlador subótimo tal que $\gamma_{\min} \leq \gamma$, e o correspondente controlador central é?

$$K(s) = \left[\frac{A + BF + \gamma^2(L^T)^{-1}ZC^T(C + DF)}{B^T X} \mid \frac{\gamma^2(L^T)^{-1}ZC^T}{-D^T} \right]$$

com $F = -S^{-1}(D^T C + B^T X)$ e $L = (1 - \gamma^2)I + XZ$.

Para que se possa atender especificações de desempenho, costuma-se projetar pré e pós compensadores para a planta $G(s)$ de modo que a planta estendida se torna $G_s = W_1 G W_2$. O sistema em malha fechada para objetivos de projeto é apresentado na Fig. 4. Esta planta estendida deve ter as características desejadas em malha aberta. Em seguida, é projetado um controlador para esta planta estendida que garanta robustez de estabilidade máxima (ou bem próximo disso) para as incertezas Δ_M e Δ_N . O controlador é projetado de tal forma que γ se aproxime de γ_{\min} .

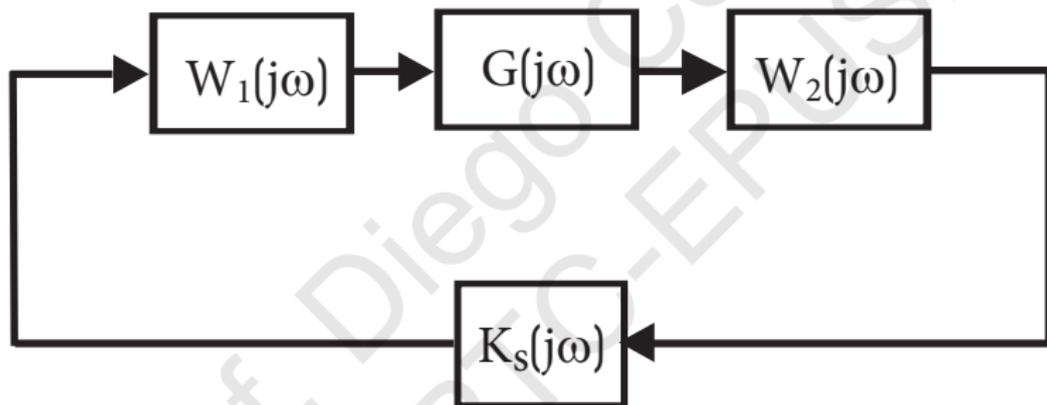


Figura: Diagrama de Blocos da Planta Estendida e Controlador

Pode-se mostrar que se $\epsilon \geq 0.2$, a resposta em frequência de $W_2GW_1K_S$ (projetado para robustificar W_2GW_1) é similar a de W_2GW_1 , de modo que o projeto pode ser separado nas duas etapas da forma descrita acima. Se ϵ ficar muito grande, possivelmente o projeto será conservador e o desempenho será ruim. O controlador final é então:

$$K_{\text{final}}(s) = W_1(s)K_S(s)W_2(s)$$

Especificações de Desempenho 4

Se queremos melhorar o desempenho para rastreamento, o diagrama de blocos a ser considerado é apresentado na Fig. 5, onde o bloco $K_s(0)W_2(0)$ foi adicionado para este fim.

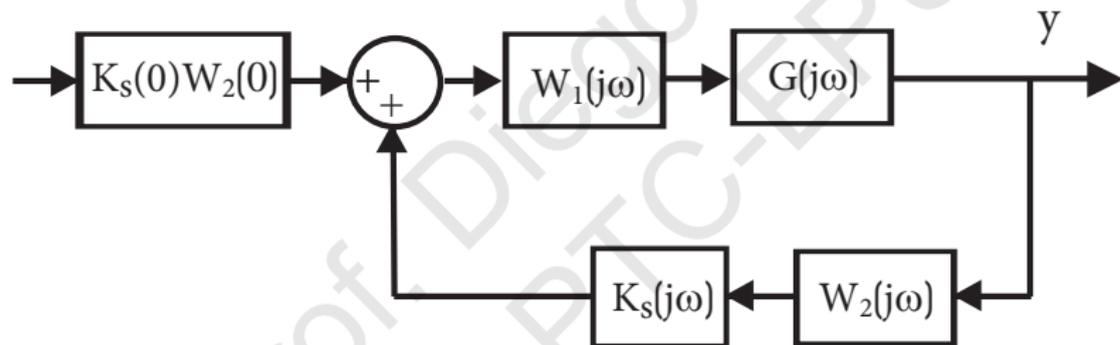


Figura: Diagrama de Blocos da Planta Estendida e Controlador para Rastreamento

O controlador H_∞ Loop-Shaping também possui uma estrutura de separação, que é:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= Ax + H(C\hat{x} - y) + Bu \\ u &= K\hat{x} \end{cases}$$

onde $H = ZC^T$ e $K = -B^T[I - \gamma^{-2}I - \gamma^{-2}XZ]^{-1}X$ e onde a planta estendida W_1GW_2 , já com o formato dos valores singulares que atende às especificações, tem a representação em espaço de estados:

$$G_S(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

Desta forma, temos os seguintes parâmetros a nos guiar no processo de projeto:

- Vale a seguinte propriedade relacionando os valores singulares de L (MFTMA) e S (função sensibilidade):

$$\underline{\sigma}(L) - 1 \leq \frac{1}{\bar{\sigma}(S)} \leq \underline{\sigma}(L) + 1 \quad (9)$$

de modo que quando $\underline{\sigma}(L) \gg 1$, teremos que $\bar{\sigma}(S) \simeq \frac{1}{\underline{\sigma}(L)}$

- Por definição, temos que a banda-passante ω_B para um sistema MIMO é dada por $\bar{\sigma}(S(j\omega_B)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, de modo que pela identidade (9), temos que $0.41 < \underline{\sigma}(L(j\omega_B)) < 2.41$, ou ainda, em decibéis:

$$-7.74 < 20 \log |\underline{\sigma}(L(j\omega_B))| < 7.64$$

- É interessante também a informação que:

$$|\bar{\sigma}(S) - \bar{\sigma}(T)| \leq \bar{\sigma}(S + T) = \bar{\sigma}(I) = 1 \leq \bar{\sigma}(S) + \bar{\sigma}(T)$$

que vem do fato de $\bar{\sigma}$ ser uma norma. Deste modo, quando $\bar{\sigma}(S)$ é pequena, temos $\bar{\sigma}(T) \simeq 1$.

- Se A e B são matrizes quaisquer não singulares, temos que $\underline{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B) \leq \bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B)$, de modo que para $T = LS$, temos $\underline{\sigma}(L)\bar{\sigma}(S) \leq \bar{\sigma}(T) \leq \bar{\sigma}(L)\bar{\sigma}(S)$, o que resulta em:

$$\underline{\sigma}(L) \leq \bar{\sigma}(T) \leq \bar{\sigma}(L)$$

- Como $\underline{\sigma}(A)\underline{\sigma}(B) \leq \underline{\sigma}(AB)$, então:

$$\underline{\sigma}(L)\underline{\sigma}(S) \leq \underline{\sigma}(T) \Rightarrow \underline{\sigma}(L) \leq \underline{\sigma}(T)$$

como $\underline{\sigma}(S) \simeq 1$ para altas frequências, o que resulta em:

$$\underline{\sigma}(L) \leq \underline{\sigma}(T) \leq \bar{\sigma}(T) \leq \bar{\sigma}(L)$$

A partir destas identidades, supondo que iremos garantir que $\epsilon \geq 2$, podemos assumir que $L = W_2 G W_1 K_s \cong W_2 G W_1$. Deste modo, as especificações de desempenho podem ser dadas em termos de *barreiras de desempenho*, como apresentado na Fig. 6.

Especificações de Desempenho 9

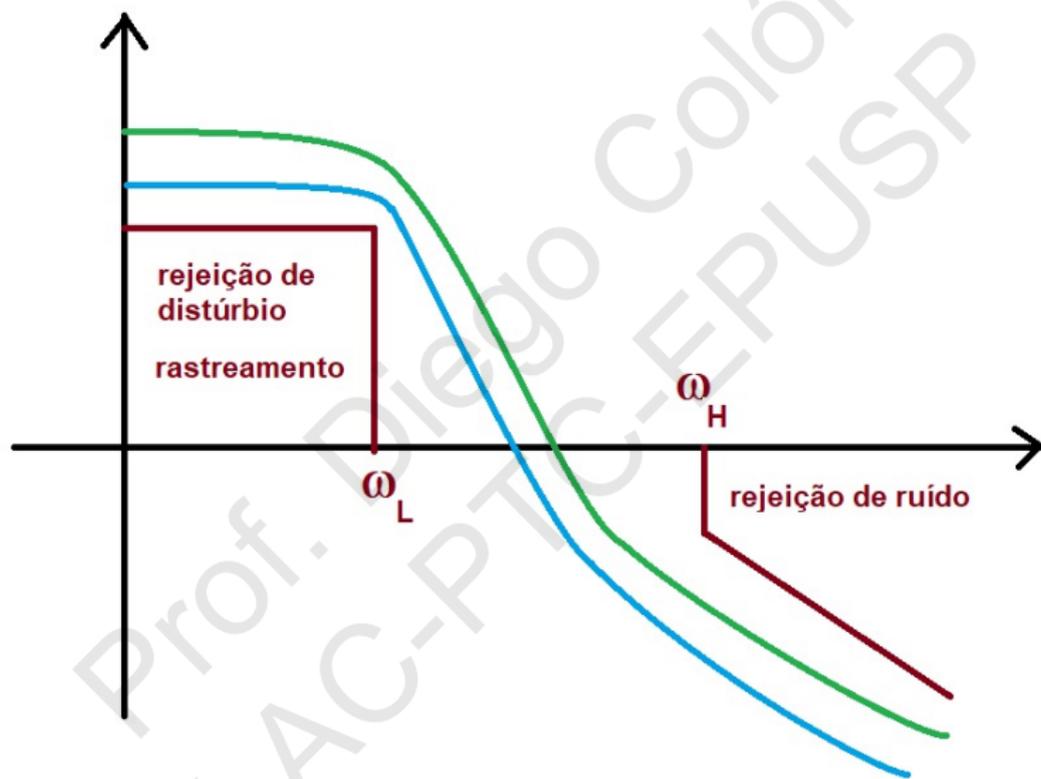


Figura: Barreiras de Desempenho para H_∞ Loop Shaping