

Teoria de Asa e Sustentação

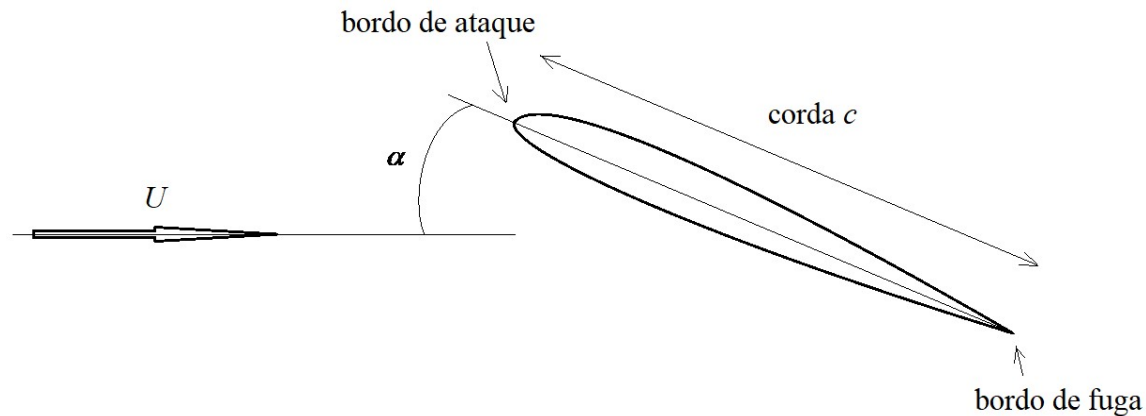
PME 3332

1) Aerofólio simétrico bidimensional (Asa infinita)

O coeficiente de arrasto de um aerofólio simétrico bidimensional é:

$$\boxed{C_L = 2\pi \alpha} \quad (\alpha \text{ em radianos}) \text{ ou } \boxed{C_L = 2\pi \sin \alpha} \quad (\alpha \text{ em graus})$$

Onde α é ao ângulo entre a direção da corrente incidente e a direção da corda (distância entre o bordo de ataque e o bordo de fuga) do aerofólio.



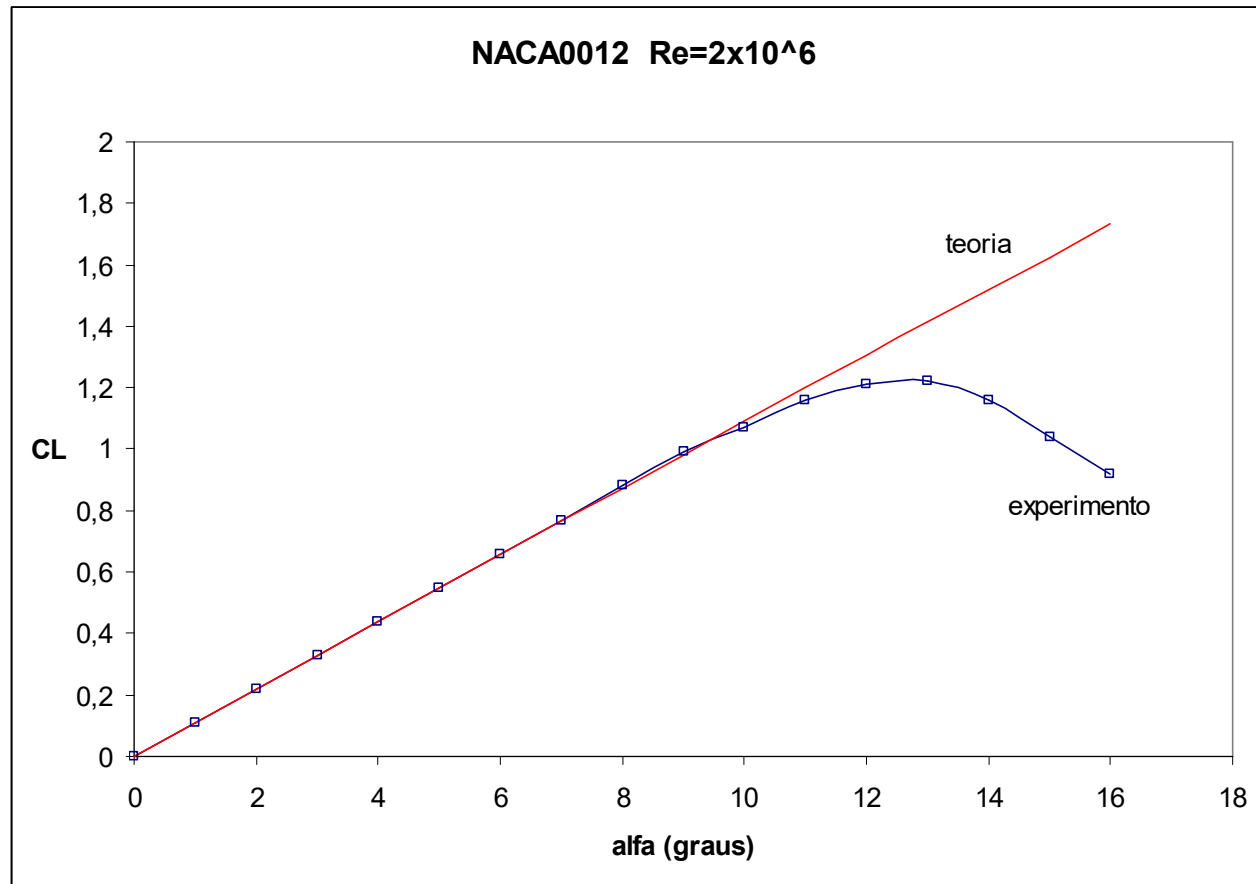
O coeficiente de sustentação se relaciona com a força de sustentação L através de:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 A_p}$$

Onde A_p é a chamada área planiforme do aerofólio. Em cálculos de coeficientes de sustentação para corpos esbeltos, a área planiforme é a área do aerofólio (ou asa) quando vista por cima.

Por exemplo, se uma asa tem uma corda constante (distância entre o bordo de ataque e o bordo de fuga) c e uma envergadura b :

$$A_p = b c$$



Comparação de relação $C_L \times \alpha$ entre a teoria e resultados experimentais para um aerofólio NACA0012.



Escoamento sem separação: a teoria funciona bem.

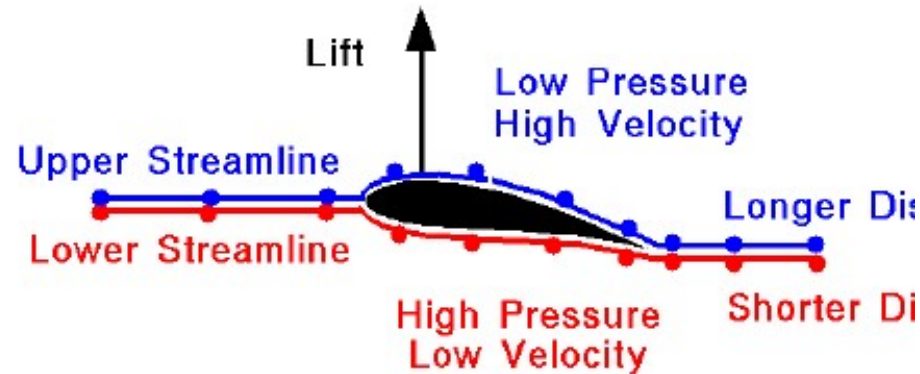


Escoamento com separação (estolado): a teoria perde validade.

Teoria Incorreta sobre Sustentação – “Equal transit time”



Incorrect Theory #1



"Longer Path" or "Equal Transit" The

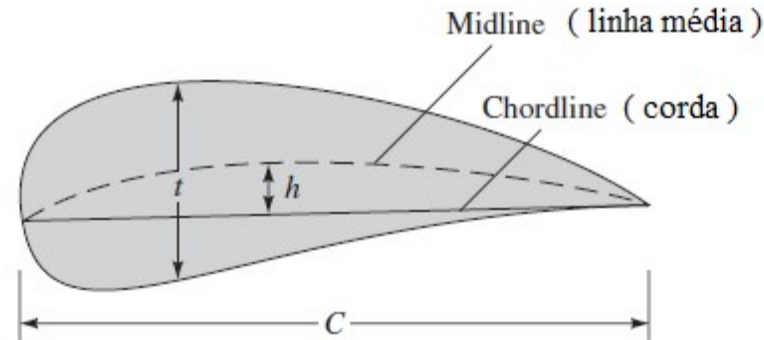
Top of airfoil is shaped to provide longer path than

Air molecules have farther to go over the top

Air molecules must move faster over the top to meet

Extraído de <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/VirtualAero/BottleRocket/airplane/wrong1.html>

2) Aerofólios não-simétricos

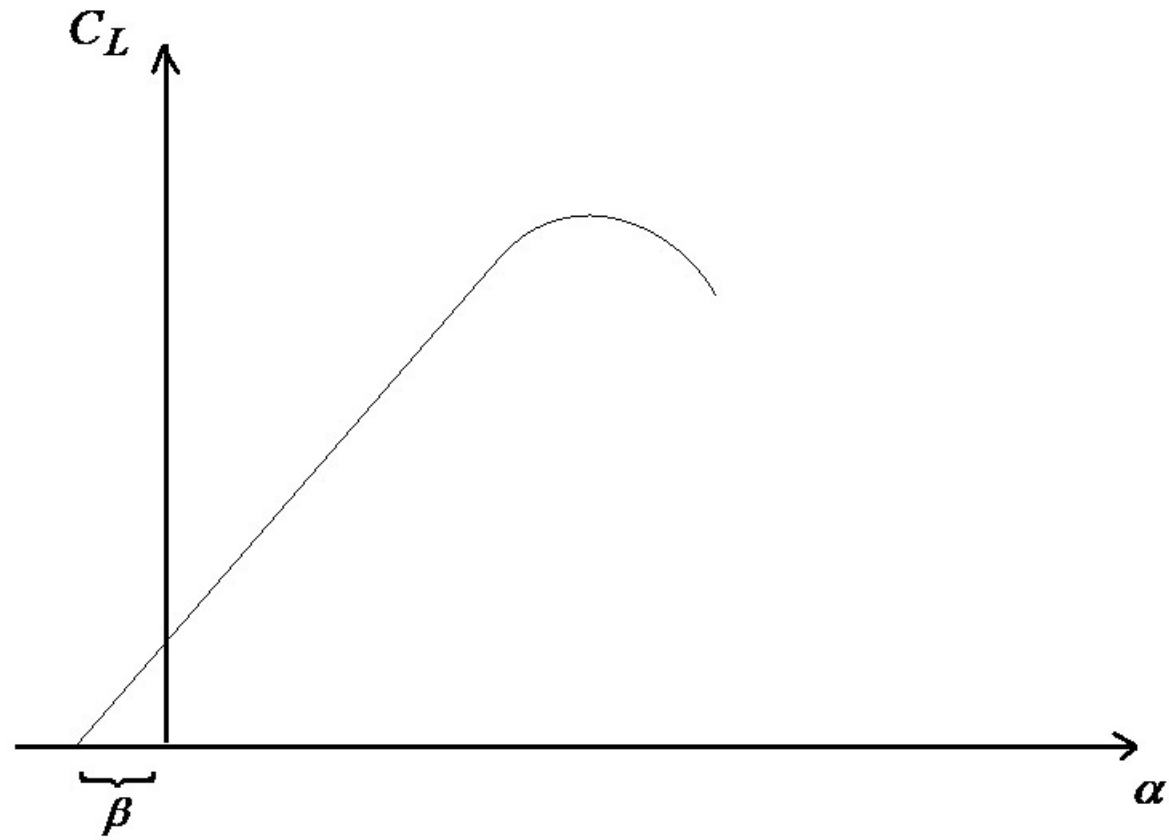


Extraído e adaptado de White, F. M., “Fluid Mechanics”, 7th Edition.

No caso de um aerofólio com arqueamento (não simétrico):

$$C_L = 2\pi \sin(\alpha + \beta)$$

Onde $\beta = \arctan\left(\frac{2h}{c}\right)$ e h é o arqueamento máximo.



Curva $C_L \times \alpha$ típica de um aerofólio não-simétrico.

Exemplo: Um aerofólio infinito tem 2% de arqueamento. Se a corda do aerofólio é $c=1,75\text{m}$, avalie a sustentação por metro de envergadura quando o aerofólio é imerso em ar com massa específica $\rho=1,2\text{kg/m}^3$ e uma velocidade $U_\infty=18\text{m/s}$. O ângulo de ataque é $\alpha=6^\circ$.

Solução - Temos que:

$$C_L = 2\pi \sin(\alpha + \beta)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{2h}{c}\right)$$

O arqueamento $\frac{h}{c}=0,02$. Assim:

$$\beta = \arctan(0,04) \Rightarrow \beta = 2,29^\circ$$

$$C_L = 2\pi \sin(6^\circ + 2,29^\circ) = 0,91$$

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho U_\infty^2 b c \Rightarrow \frac{L}{b} = \frac{1}{2} \times 0,91 \times 1,2 \times 18^2 \times 1,75$$

$\frac{L}{b} = 310 \text{ N/m}$

3) Asa Finita

Quando a asa tem uma determinada envergadura b , os coeficientes de arrasto e sustentação são influenciados pela chamada razão de aspecto RA da asa (em inglês AR , de *aspect ratio*):

$$RA = \frac{b^2}{Ap}$$

Todo aerofólio tem um coeficiente de arrasto bidimensional dito coeficiente de asa infinita chamado de $C_{D\infty}$. Quando a asa tem uma determinada razão de aspecto, seus coeficientes de arrasto e sustentação vão se afastar dos verificados para uma asa de envergadura infinita.

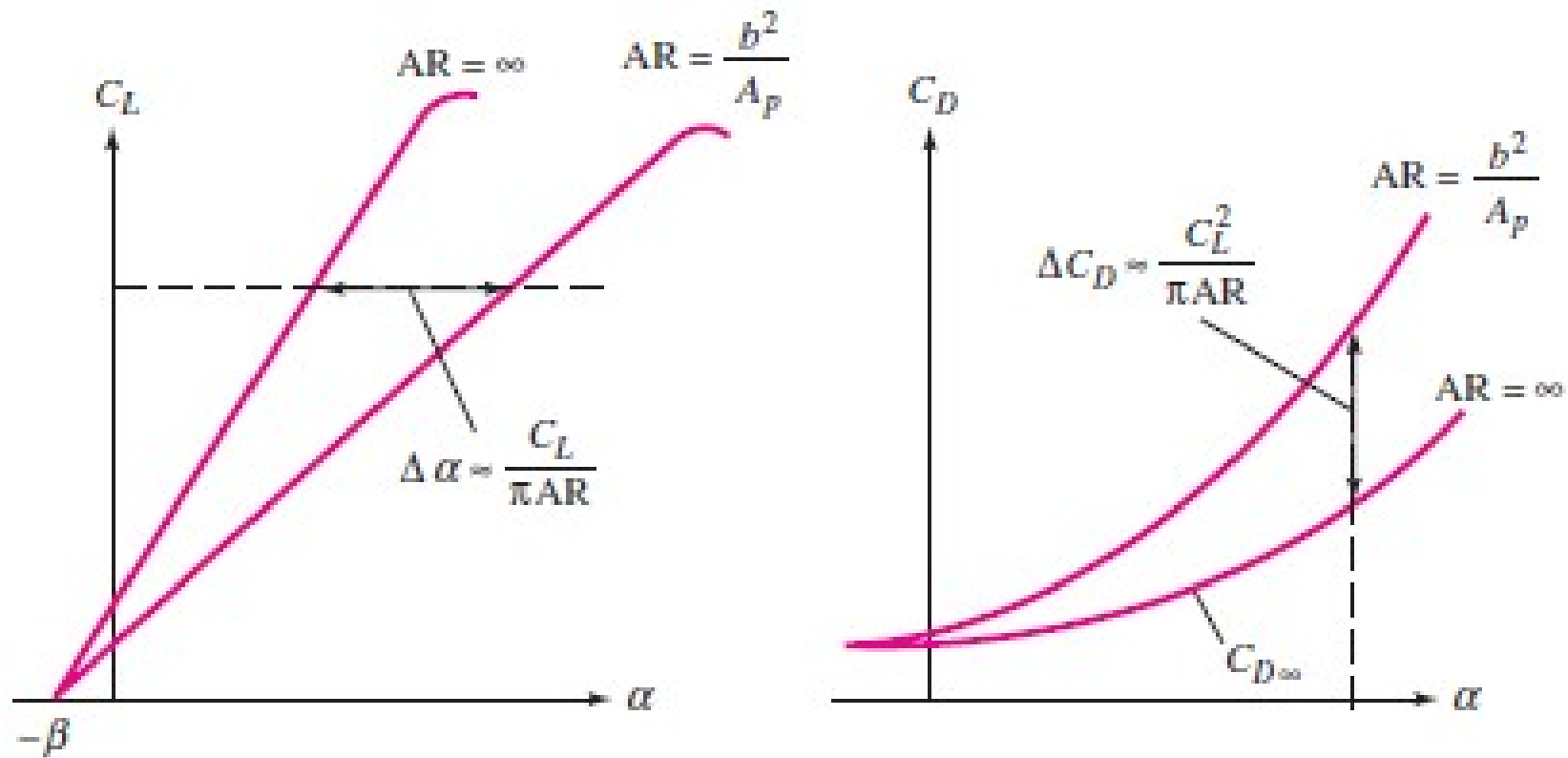
O coeficiente de sustentação resulta:

$$C_L = \frac{2\pi \sin(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}}$$

O coeficiente de arrasto resulta:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA}$$

Onde $\frac{C_L^2}{\pi RA}$ é o chamado coeficiente de arrasto induzido.



Comparação entre os coeficientes de sustentação e arrasto de asa infinita e os verificados com uma razão de aspecto finita. Figura extraída de White, F.M., “Fluid Mechanics”, 7th edition.

Exemplo: Para um aerofólio com arqueamento $h/c = 4\%$, corda constante $c = 4\text{cm}$ e razão de aspecto $RA = 20$, mediram-se a força de arrasto $D = 0,4\text{N}$ e a força de sustentação $L = 12\text{N}$ em ar com velocidade $U = 20 \text{ m/s}$ e $\rho = 1,1 \text{ kg/m}^3$ para um dado ângulo de ataque α . Mantendo-se o ângulo de ataque, a velocidade e propriedades do ar, a corda c e diminuindo-se a envergadura b de forma a ter $RA = 4$, quais valores serão obtidos para o coeficiente de arrasto C_D e coeficiente de sustentação C_L ?

Solução: nas condições de teste ($RA=20$) temos que os coeficientes de arrasto e sustentação são dados por:

$$C_D = \frac{2D}{\rho U^2 A_p} \quad ; \quad C_L = \frac{2L}{\rho U^2 A_p}$$

Como a corda é $c = 0,04$ m, resulta que se $RA=20$ temos $b = 0,80$ m e $Ap=0,032$ m². Assim:

$$C_D = \frac{2 \times 0,4}{1,1 \times 20^2 \times 0,032} = 0,057$$

$$C_L = \frac{2 \times 12}{1,1 \times 20^2 \times 0,032} = 1,700$$

Levando em conta o arrasto induzido, temos:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA} \Rightarrow 0,057 = C_{D\infty} + \frac{1,700^2}{\pi \times 20}$$

Assim, o coeficiente de arrasto de asa infinita resulta:

$$\boxed{C_{D\infty} = 0,011}$$

Por outro lado, da expressão válida para o coeficiente de sustentação, lembrando que o ângulo de arqueamento é $\beta = \arctg(0,08) = 4,6^\circ$:

$$1,700 = \frac{2 \times \pi \times \text{sen}(\alpha + 4,6^\circ)}{1 + \frac{2}{20}}$$

Resulta, nas condições de teste ($RA=20$) um ângulo de ataque:

$$\boxed{\alpha = 12,7^\circ}$$

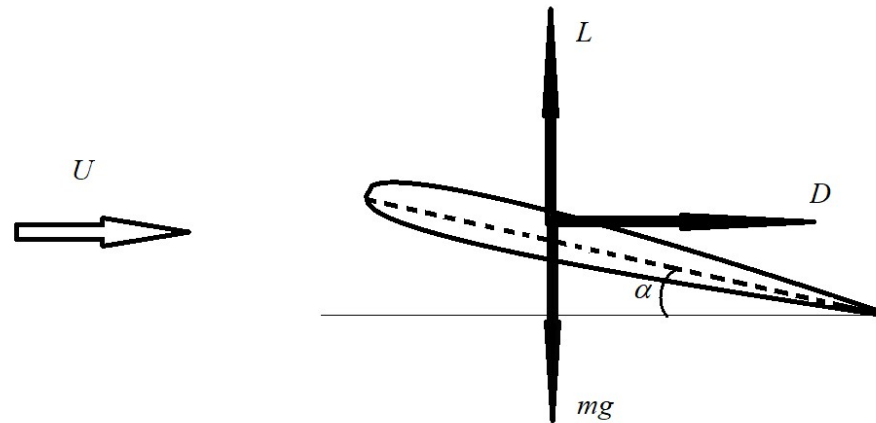
Se mudarmos a razão de aspecto para $RA=4$:

$$C_L = \frac{2 \times \pi \times \text{sen}(12,7^\circ + 4,6^\circ)}{1 + \frac{2}{4}} = 1,250$$

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA} \Rightarrow C_D = 0,011 + \frac{1,250^2}{\pi \times 4} = 0,135$$

Exemplo: Um avião tem massa $m=20000\text{kg}$ e voa com velocidade $U=175\text{m/s}$ em ar com $\rho=0,74\text{kg/m}^3$. A asa é retangular e tem corda $c=3\text{m}$. O aerofólio é simétrico ($\beta=0^\circ$) e o ângulo de ataque é $\alpha=2,5^\circ$. Estime a envergadura b , a razão de aspecto RA e o arrasto induzido Di . Considere $g=9,8\text{m/s}^2$.

Solução: Em vôo horizontal sustentação tem que igualar o peso, assim:



$$mg = C_L \frac{1}{2} \rho U^2 A_p$$

O coeficiente de sustentação, a área planiforme e a razão de aspecto são dados por:

$$C_L = \frac{2\pi \sin(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}} \quad ; \quad Ap = bc \text{ (asa retangular)} \quad ; \quad RA = \frac{b^2}{Ap} = \frac{b}{c}$$

Lembrando que $\beta=0^\circ$, a substituição das expressões acima na primeira resulta:

$$mg = \frac{\pi \sin \alpha}{b + 2c} \rho U^2 b^2 c$$

Substituindo os dados numéricos:

$$20000 \times 9,8 = \frac{\pi \operatorname{sen} 2,5^\circ}{b + 2 \times 3} \times 0,74 \times 175^2 \times b^2 \times 3$$

Isso resulta:

$$b^2 - 21,0b - 126,2 = 0$$

O único valor positivo das raízes dessa equação é $\boxed{b = 25,9 \text{ m}}$.

Com esse valor de envergadura, a razão de aspecto resulta:

$$RA = \frac{b}{c} = \frac{25,9}{3} \Rightarrow \boxed{RA = 8,6}$$

O coeficiente de arrasto é dado por $C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA}$, assim, o coeficiente de arrasto induzido C_{Di} é:

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi RA}$$

O coeficiente de sustentação resulta:

$$C_L = \frac{2\pi \sin(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}} = \frac{2\pi \sin(2,5^\circ + 0^\circ)}{1 + \frac{2}{8,6}} = 0,222$$

$$\text{Assim, } C_{Di} = \frac{0,222^2}{\pi 8,6} = 0,0018$$

O arrasto induzido é dado por:

$$D_i = C_{Di} \frac{1}{2} \rho U^2 bc = 0,0018 \times \frac{1}{2} \times 0,74 \times 175^2 \times 25,9 \times 3$$

Isso resulta:

$$\boxed{D_i = 1606 \text{ N}}$$

Problema P7.120: Mostre que a máxima relação C_L/C_D ocorre quando $C_D = 2C_{D\infty}$. Qual o valor de L/D máximo (onde L é a força de sustentação e D é a força de arrasto) e o valor do ângulo de ataque α para uma asa simétrica com razão de apecto $RA=5$ e $C_{D\infty}=0,009$?

Solução: O coeficiente de arrasto é dado por:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA}$$

Isso resulta:

$$C_L = [(C_D - C_{D\infty})\pi RA]^{1/2}$$

Ou então:

$$\frac{C_L}{C_D} = \frac{[(C_D - C_{D\infty})\pi RA]^{1/2}}{C_D}$$

Fazendo a derivada dessa expressão em relação à C_D :

$$\frac{d\left(\frac{C_L}{C_D}\right)}{dC_D} = \frac{\pi RA\left(C_{D\infty} - \frac{1}{2}C_D\right)}{C_D^2 [(C_D - C_{D\infty})\pi RA]^{1/2}}$$

Essa derivada será nula para $C_D = 2C_{D\infty}$.

Além disso, é fácil ver que, para $C_D > 2C_{D\infty}$ a derivada é negativa, e para $C_D < 2C_{D\infty}$ a derivada é positiva. Assim:

Se temos $C_D = 2C_{D\infty}$ a relação C_L/C_D será maximizada.

Quanto ao restante da questão, a situação de L/D máximo corresponde a C_L/C_D máximo. Voltando à expressão do coeficiente de arrasto:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA} = 2C_{D\infty} \text{ quando temos } L/D \text{ máximo. Assim:}$$

$$C_D = 2 \times 0,009 = 0,018$$

O coeficiente de sustentação quando temos L/D máximo é dado por:

$$\frac{C_L^2}{\pi RA} = C_{D\infty}$$

Logo:

$$C_L = \sqrt{\pi RA C_{D\infty}} = \sqrt{\pi \times 5 \times 0,009} = 0,38$$

Portanto:

$$L/D \text{ máximo} = C_L / C_D \text{ máximo} = \frac{0,38}{0,018} \cong 21$$

Finalmente, o ângulo de ataque pode ser calculado por:

$$C_L = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}}$$

Como o aerofólio é simétrico, $\beta = 0^\circ$. Na situação ótima em que temos C_L/C_D máximo:

$$0,38 = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha + 0^\circ)}{1 + \frac{2}{5}}$$

Isso resulta $\alpha = 4,9^\circ$

Exemplo: Um hidrofólio simétrico se move com velocidade $U=15\text{ m/s}$ em água salgada ($\rho=1025\text{ kg/m}^3$) com sua relação $(C_L/C_D)_{\max}=18$. A área planiforme A_p é de 3 m^2 e a sustentação obtida é de 120 kN . Estime a razão de aspecto RA e o ângulo de ataque em graus.

Solução - O coeficiente de sustentação é dado por:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 A_p} = \frac{120000}{\frac{1}{2} \times 1025 \times 15^2 \times 3} \Rightarrow C_L = 0,35$$

Como o hidrofólio está na situação em que C_L/C_D é máximo:

$$(C_L/C_D)_{\max} = \frac{C_L}{2C_{D\infty}} = 18 \Rightarrow C_{D\infty} = \frac{C_L}{2 \times 18} = \frac{0,35}{36} \Rightarrow C_{D\infty} \cong 0,01$$

Do coeficiente de arrasto na condição em que C_L/C_D é máximo:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA} = 2C_{D\infty}$$

$$\text{Isso resulta } \frac{C_L^2}{\pi RA} = C_{D\infty} \Rightarrow RA = \frac{C_L^2}{\pi C_{D\infty}} = \frac{0,35^2}{\pi \times 0,01}$$

$$\text{Isso resulta } \boxed{RA=3,9}$$

Finalmente, da expressão do coeficiente de sustentação:

$$C_L = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}}$$

Como o hidrofólio é simétrico, $\beta = 0^\circ$. Assim:

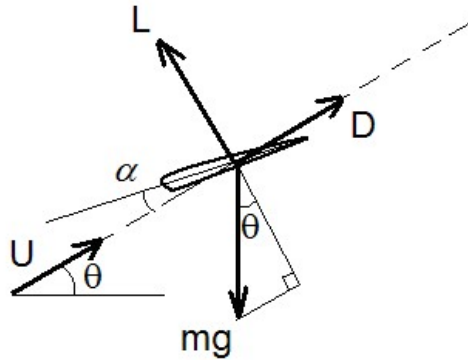
$$0,35 = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha + 0^\circ)}{1 + \frac{2}{3,9}}$$

Isso resulta $\boxed{\alpha = 4,8^\circ}$

Exercício 7.121: Em vôo planado a sustentação L e o arrasto D entram em equilíbrio com o peso.

a) Mostre que, se não há vento, o planador desce com um ângulo de planeio θ tal que $\tan \theta = D/L$;

b) Para um planador com massa $m=200\text{kg}$, área planiforme $A_p=12\text{m}^2$, razão de aspecto $RA=11$ e aerofólio simétrico, estime a velocidade de estol, o ângulo mínimo de planeio e a máxima distância que a aeronave pode planar em ar sem vento, partindo de uma altitude $h=1200\text{m}$. Considere uma massa específica do ar $\rho=1,09\text{kg/m}^3$. Dados: $C_{L_{\max}}=1,3$; $C_{D\infty}=0,006$; $g=9,81\text{m/s}^2$.



Solução:

a) Da figura, é fácil, ver, decompondo o peso, que:

$$mg \cos \theta = L \quad ; \quad mg \sin \theta = D$$

Assim, $\boxed{\operatorname{tg} \theta = \frac{D}{L}}$

b) A velocidade de estol é a mínima velocidade para a qual a aeronave se mantém voando, e é obtida para o máximo coeficiente de sustentação.

Assim:

$$mg = C_{L \max} \frac{1}{2} \rho U_{\text{estol}}^2 A_p$$

Substituindo os dados numéricos:

$$200 \times 9,8 = 1,3 \times \frac{1}{2} \times 1,09 \times U_{estol}^2 \times 12 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{estol} = 15,2 \text{ m/s}}$$

Finalmente, o ângulo mínimo de planeio corresponde à mínima relação D/L , ou seja, à máxima relação L/D . Nesta condição, sabemos, de exercícios anteriores (que constituem um dos resultados mais importantes da teoria de asa) que:

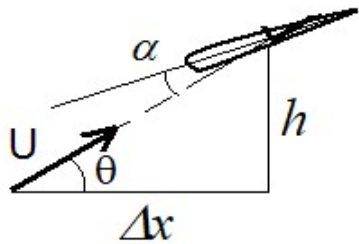
$$C_D = 2C_{D\infty} \quad \text{e} \quad \frac{C_L^2}{\pi RA} = C_{D\infty}$$

Dos dados numéricos:

$$C_D = 2 \times 0,006 = 0,012$$

$$C_L = \sqrt{C_{D\infty} \pi R A} = \sqrt{0,006 \times \pi \times 11} = 0,46$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{D}{L} = \frac{C_D}{C_L} = \frac{0,012}{0,46} \Rightarrow \boxed{\theta = 1,49^\circ}$$



$$\text{Com esse resultado, } \Delta x = \frac{h}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{1200}{\operatorname{tg} 1,49^\circ} \Rightarrow \boxed{\Delta x = 46 \text{ km}}$$

Exercício: Um barco de massa $m=5000\text{kg}$ desloca-se em água de massa específica $\rho=1000\text{kg/m}^3$ sustentado por um hidrofólio simétrico ($\beta = 0^\circ$) com ângulo de ataque ajustável, área planiforme $A_p=2,4\text{ m}^2$, razão de aspecto $RA=5$ e coeficiente de arrasto para razão de aspecto infinita $C_{D\infty} = 0,08$. O motor tem potência $\dot{W} = 410\text{ kW}$. (a) Estime a velocidade máxima possível considerando apenas o arrasto do hidrofólio na água (despreze o arrasto do barco no ar) e calcule o ângulo de ataque; (b) Se o barco navega em cruzeiro na condição em que C_L/C_D é máximo, calcule a velocidade de cruzeiro, ângulo de ataque de cruzeiro e potência consumida de cruzeiro.



Dado: Considerar a aceleração da gravidade $g = 10\text{m/s}^2$.

Solução:

a) Para obter a velocidade máxima temos que considerar o arrasto na condição em que toda a potência do motor é aproveitada:

$$\dot{W} = D \times U = \frac{1}{2} C_D \rho U^3 A_p$$

Substituindo o coeficiente de arrasto:

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \left(C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi R A} \right) \rho U^3 A_p \quad (i)$$

O coeficiente de sustentação é dado por:

$$mg = \frac{1}{2} \rho U^2 C_L A_p \Rightarrow C_L = \frac{2mg}{\rho U^2 A_p} \quad (\text{ii})$$

Substituindo (ii) em (i):

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \left(C_{D\infty} + \frac{4m^2 g^2}{\pi R A \rho^2 U^4 A_p^2} \right) \rho U^3 A_p$$

Logo:

$$\dot{W} = \frac{1}{2} C_{D\infty} \rho U^3 A_p + \frac{2 m^2 g^2}{\pi R A \rho U A_p}$$

Isso resulta:

$$410000 = \frac{1}{2} \times 0,08 \times 1000 \times U^3 \times 2,4 + \frac{2 \times (50000)^2}{\pi \times 5 \times 1000 \times U \times 2,4}$$

Que resulta:

$$410000 = 96 U^3 + \frac{132629}{U}$$

Podemos escrever:

$$U^4 = 4271U - 1382 \quad \Rightarrow \quad U = (4271U - 1382)^{0,25}$$

Fazendo uma solução iterativa partindo de um chute inicial $U=1\text{m/s}$ do lado direito da equação:

U	U_{novo}
1	7,33
7,33	13,15
13,15	15,30
15,30	15,90
15,90	16,06
16,06	16,10
16,10	16,11
16,11	16,11

Assim, a velocidade máxima é $U_{\max} = 16,11 \text{ m/s}$

Da expressão (ii) podemos obter o coeficiente de sustentação na condição de velocidade máxima:

$$C_L = \frac{2mg}{\rho U^2 A_p} = \frac{2 \times 50000}{1000 \times 16,11^2 \times 2,4} \Rightarrow C_L = 0,161$$

Para um aerofólio simétrico ($\beta = 0^\circ$):

$$C_L = \frac{2\pi \sin(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}} \Rightarrow 0,161 = \frac{2\pi \sin(\alpha + 0^\circ)}{1 + \frac{2}{5}} \Rightarrow \alpha = 2,06^\circ$$

b) Em cruzeiro, se C_L / C_D é máximo:

$$C_D = 2 C_{D\infty} \quad \text{e} \quad \frac{C_L^2}{\pi R A} = C_{D\infty}$$

Destas relações resultam:

$$C_D = 2 \times 0,08 = 0,16$$

$$C_L = \sqrt{0,08 \times \pi \times 5} = 1,121$$

Da expressão (ii) podemos obter agora a velocidade de cruzeiro:

$$C_L = \frac{2mg}{\rho U^2 A_p} \Rightarrow 1,121 = \frac{2 \times 50000}{1000 \times U^2 \times 2,4} \Rightarrow \boxed{U = 6,1 \text{ m/s}}$$

O novo ângulo de ataque resulta:

$$1,121 = \frac{2\pi \sin(\alpha + 0^\circ)}{1 + \frac{2}{5}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 14,46^\circ}$$

A potência consumida em cruzeiro será dada por:

$$\dot{W} = \frac{1}{2} C_D \rho U^3 A_p$$

Substituindo os dados numéricos:

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \times 0,16 \times 1000 \times 6,1^3 \times 2,4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{W} = 43,58 \text{ kW}}$$

Bibliografia

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

<http://web.mit.edu/16.unified/www/SPRING/fluids/Spring2008/LectureNotes/f06.pdf>

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Munson, Young, Okiishi, “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos, Ed. Edgard Blucher, 4ª edição, 1999.