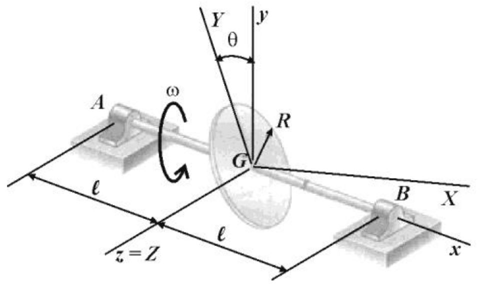
PME3100 Mecânica I

Dinâmica do Sólido

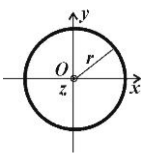
Supõe-se um referencial fixo.

A definição de sólido ou corpo rígido foi vista na Cinemática.

Exemplo 5.10: O disco homogêneo de massa *M* está montado sobre o eixo *AB*, de massa desprezível. O plano *YZ* do disco faz um ângulo θ com o plano *yz*, como mostra a figura, e ambos os planos são solidários ao eixo girante. Sabendo que o eixo gira com velocidade angular constante ω em torno de *AB*, desconsidere o peso e determine as reações dinâmicas nos pontos *A* e *B*.



- Dado:



Disco homogêneo de raio *r* e massa *m*:

$$J_{Oz} = \frac{mr^2}{2}$$

$$J_{Ox} = J_{Oy} = \frac{mr^2}{4}$$

(Sugestão: usar o sistema G(X,Y,Z) para escrever a expressão da quantidade de movimento angular, e mudar para o sistema G(x,y,z) antes de derivar).

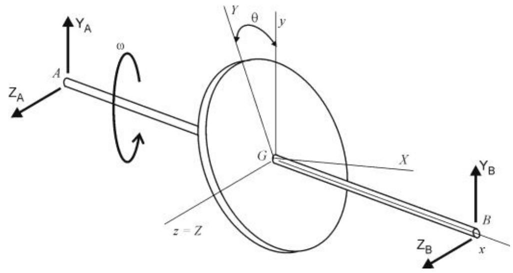
Resolução:

Relações entre coordenadas $G(x,y,z) \equiv G(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ e $G(X,Y,Z) \equiv G(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$:

$$\vec{I} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath};\ \ \vec{J} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath};\ \ \vec{K} = \vec{k}\ \ (1)$$

Vetor rotação:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{\imath} = \omega\cos\theta\,\vec{I} + \omega\sin\theta\,\vec{J}\ \ (2)$$



TR: $M\vec{a}_G = \vec{F}_A + \vec{F}_B \Rightarrow \vec{0} = Y_A\vec{J} + Z_A\vec{k} + Y_B\vec{J} + Z_B\vec{k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y_A = -Y_B & (3) \\ Z_A = -Z_B & (4) \end{cases}$$

Quantidade de movimento angular do disco, usando $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$:

$$\vec{H}_G = m(G-G)\wedge\vec{v}_A + (J_X\omega_X - J_{XY}\omega_Y - J_{XZ}\omega_Z)\vec{I} + (-J_{YX}\omega_X + J_Y\omega_Y - J_{YZ}\omega_Z)\vec{J} +$$
$$+(-J_{ZX}\omega_X - J_{ZY}\omega_Y + J_Z\omega_Z)\vec{K} = J_X\omega_X\vec{I} + J_Y\omega_Y\vec{J}$$

Passando $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ para $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, usando (1) e (2):

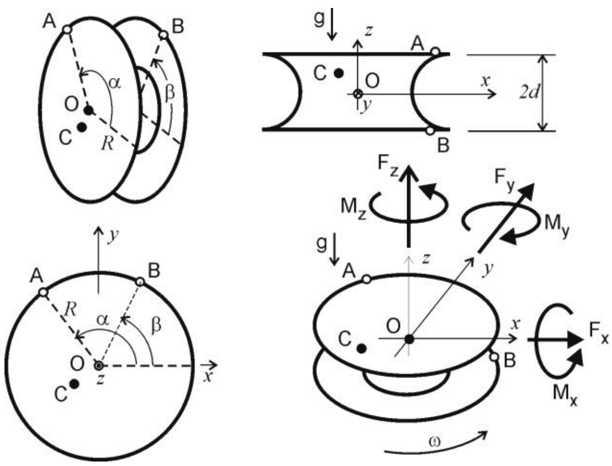
$$\vec{H}_G = \frac{MR^2}{2}\omega\cos\theta\,(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}) + \frac{MR^2}{4}\omega\sin\theta\,(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}) =$$
$$= \frac{MR^2}{4}\omega[(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)\vec{\imath} + 3\sin\theta\cos\theta\,\vec{\jmath}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \frac{3MR^2\sin\theta\cos\theta}{4}\omega\dot{\vec{\jmath}} = \frac{3MR^2\sin\theta\cos\theta}{4}\omega^2\vec{k}$$

TQMA: $\dot{\vec{H}}_G = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_G + \vec{M}_G^{ext} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3MR^2 \sin\theta \cos\theta}{4}\omega^2\vec{k} = (A-G)\wedge\vec{F}_A + (B-G)\wedge\vec{F}_B = l\big[(Y_B - Y_A)\vec{k} + (Z_A - Z_B)\vec{j}\big]$$

Usando (3) e (4): $\frac{3MR^2 \sin\theta \cos\theta}{4}\omega^2\vec{k} = l\big(-2Y_A\vec{k} + 2Z_A\vec{j}\big) \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Y_A = -Y_B = -\frac{3MR^2 \sin\theta \cos\theta}{8l}\omega^2} \\ e \\ \boldsymbol{Z_A = Z_B = 0} \end{cases}$

Exemplo 5.11(A): ***Balanceamento de roda (01):*** Uma roda de automóvel, com largura $2d$ e raio R, está desbalanceada, com seu centro de massa C situado fora do seu eixo de rotação Oz. Essa roda é colocada em uma máquina de balancear que faz a roda girar em torno do seu eixo geométrico Oz e, através de células de carga, mede as forças F_x, F_y *e* F_z e os momentos M_{Ox}, M_{Oy} *e* M_{Oz} reativos que aparecem devido à rotação $\vec{\omega}$ em torno de Oz. É dada a aceleração da gravidade g na direção de Oz, vertical. Usando as coordenadas (O,x,y,z), e em função daqueles esforços medidos, de $\vec{\omega}$, de $\dot{\vec{\omega}}$ e dos dados, pede-se:



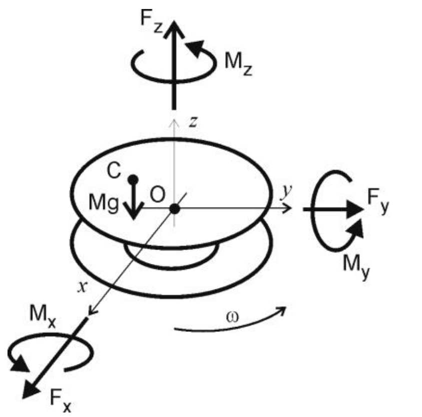
a) com $\vec{\omega}$ constante, obtenha as expressões da massa M, das coordenadas x_C e y_C do ponto C, e dos produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oxz} da roda;

b) com aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ não nula, obtenha a expressão do momento de inércia J_{Oz}.

Resolução:

Cinemática:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (C - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (C - O)] = -(\omega^2 x_C + \dot{\omega} y_C)\vec{\imath} + (\dot{\omega} x_C - \omega^2 y_C)\vec{\jmath}$$



a) com $\vec{\omega}$ constante: $\vec{a}_C = -\omega^2 x_C \vec{\imath} - \omega^2 y_C \vec{\jmath}$

$$\textbf{TR: } M\vec{a}_C = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + (F_z - Mg)\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} 0 = F_z - Mg \Rightarrow \boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{F_z}}{\boldsymbol{g}} \\ -M\omega^2 x_C = F_x \Rightarrow \boldsymbol{x_C} = -\frac{\boldsymbol{F_x g}}{\boldsymbol{F_z \omega^2}} \\ M\omega^2 y_C = F_y \Rightarrow \boldsymbol{y_C} = \frac{\boldsymbol{F_y g}}{\boldsymbol{F_z \omega^2}} \end{cases}$$

$$\vec{H}_O = \left(-J_{Oxz}\vec{\imath} - J_{Oyz}\vec{\jmath} + J_{Oz}\vec{k}\right)\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_O = \left[-J_{Oxz}\left(\omega\vec{k} \wedge \vec{\imath}\right) - J_{Oyz}\left(\omega\vec{k} \wedge \vec{\jmath}\right)\right]\omega + \left(-J_{Oxz}\vec{\imath} - J_{Oyz}\vec{\jmath} + J_{Oz}\vec{k}\right)\dot{\omega} =$$

$$= \left(J_{Oyz}\omega^2 - J_{Oxz}\dot{\omega}\right)\vec{\imath} - \left(J_{Oxz}\omega^2 + J_{Oyz}\dot{\omega}\right)\vec{\jmath} + J_{Oz}\dot{\omega}\vec{k} \qquad (1)$$

$$\textbf{TQMA: } \dot{\vec{H}}_O = M_x\vec{\imath} + M_y\vec{\jmath} + M_z\vec{k} + (C - O) \wedge \left(-Mg\vec{k}\right) =$$

$$= M_x\vec{\imath} + M_y\vec{\jmath} + M_z\vec{k} + \left(x_C\vec{\imath} + y_C\vec{\jmath} + z_C\vec{k}\right) \wedge \left(-Mg\vec{k}\right) =$$

$$= (M_x - Mgy_C)\vec{\imath} + \left(M_y + Mgx_C\right)\vec{\jmath} + M_z\vec{k} \qquad (2)$$

Portanto, com $\dot{\omega} = 0$, de (1) e (2):

$$J_{Oyz}\omega^2 = M_x - Mgy_C \Rightarrow \boldsymbol{J_{Oyz}} = \frac{\boldsymbol{M_x}}{\boldsymbol{\omega^2}} - \frac{\boldsymbol{F_y g}}{\boldsymbol{\omega^4}}$$

e

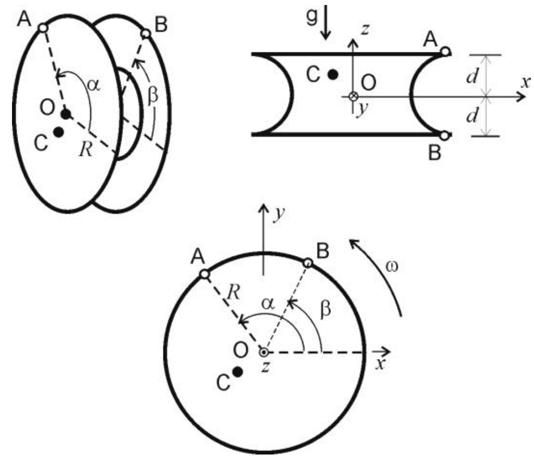
$$J_{Oxz}\omega^2 = M_y + Mgx_C \Rightarrow \boldsymbol{J_{Oxz}} = -\left(\frac{\boldsymbol{M_y}}{\boldsymbol{\omega^2}} - \frac{\boldsymbol{F_x g}}{\boldsymbol{\omega^4}}\right)$$

(b) de (1) e (2): $J_{Oz}\dot{\omega} = M_z \Rightarrow \boldsymbol{J_{Oz}} = \frac{\boldsymbol{M_z}}{\boldsymbol{\dot{\omega}}}$

Respostas:

(a) $M = \frac{F_z}{g}$	$x_C = -\frac{F_x g}{F_z \omega^2}$ $y_C = \frac{F_y g}{F_z \omega^2}$	$J_{Oxz} = -\left(\frac{M_y}{\omega^2} - \frac{F_x g}{\omega^4}\right)$ $J_{Oyz} = \frac{M_x}{\omega^2} - \frac{F_y g}{\omega^4}$	(b) $J_{Oz} = \frac{M_z}{\dot{\omega}}$

<u>Exemplo 5.11(B)</u>: ***Balanceamento de roda (02)*:** Uma roda de automóvel, com largura 2d e raio R, está desbalanceada, com seu centro de massa C situado fora do seu eixo de rotação Oz. Essa roda é colocada em uma máquina de balancear, que faz a roda girar em torno do seu eixo geométrico Oz vertical e, através de células de carga, mede as forças e os momentos reativos que aparecem devido à rotação $\vec{\omega}$ em torno de Oz. Usando um sistema de coordenadas (O,x,y,z) fixo à roda, esses esforços reativos permitem obter a massa M, as coordenadas x_C e y_C, o momento de inércia J_{Oz} e os produtos de inércia J_{Oxz} e J_{Oyz} da roda desbalanceada, aqui considerados dados. Para fazer o balanceamento, serão acrescentadas duas massas m_A e m_B na periferia da roda, nas posições definidas pelos ângulos α e β, conforme a figura. É dada a aceleração da gravidade. Usando as coordenadas dadas, determine os ângulos α e β, e os valores m_A e m_B das massas a serem acrescentadas na periferia da roda para fazer o balanceamento, ou seja, para que todos os esforços <u>dinâmicos</u> nos mancais sejam nulos quando a roda estiver girando com rotação $\vec{\omega}$ constante em torno de Oz, em função dos dados.



Resolução:

TR: centro de massa G da roda balanceada:

$$M\vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow G \in Oz \Rightarrow x_G = y_G = 0$$

Portanto, pela definição de centro de massa:

$$Mx_C + m_A x_A + m_B x_B = (M + m_A + m_B)x_G = 0 \Rightarrow m_A \cos\alpha + m_B \cos\beta = -\frac{Mx_C}{R} \quad (1)$$

e

$$My_C + m_A R\sin\alpha + m_B R\sin\beta = 0 \Rightarrow m_A \sin\alpha + m_B \sin\beta = -\frac{My_C}{R} \quad (2)$$

Com ω constante:

$$\vec{H}_G = \left(-J_{Gxz}\vec{\imath} - J_{Gyz}\vec{\jmath} + J_{Gz}\vec{k}\right)\omega \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = \left[-J_{Gxz}\left(\omega\vec{k} \wedge \vec{\imath}\right) - J_{Gyz}\left(\omega\vec{k} \wedge \vec{\jmath}\right)\right]\omega = \omega^2\left(J_{Gyz}\vec{\imath} - J_{Gxz}\vec{\jmath}\right)$$

TQMA: esforços dinâmicos nulos: $\dot{\vec{H}}_G = \omega^2\left(J_{Gyz}\vec{\imath} - J_{Gxz}\vec{\jmath}\right) = \vec{M}_G^{ext} = \vec{0}$

Portanto:

$$J_{Gxz} = J_{Oxz} + m_A x_A z_A + m_B x_B z_B = J_{Oxz} + m_A Rd\cos\alpha - m_B Rd\cos\beta = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_A \cos\alpha - m_B \cos\beta = -\frac{J_{Oxz}}{Rd} \quad (3)$$

e

$$J_{Gyz} = J_{Oyz} + m_A y_A z_A + m_B y_B z_B = J_{Oyz} + m_A Rd\sin\alpha - m_B Rd\sin\beta = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_A \sin\alpha - m_B \sin\beta = -\frac{J_{Oyz}}{Rd} \quad (4)$$

De (1), (2), (3) e (4):

$$\tan\alpha = \frac{J_{Oyz}+Mdy_C}{J_{Oxz}+Mdx_C} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{J_{Oyz}+Mdy_C}{J_{Oxz}+Mdx_C}\right) \text{ e } m_A = \frac{\sqrt{(J_{Oxz}+Mdx_C)^2+\left(J_{Oyz}+Mdy_C\right)^2}}{2Rd}$$

$$\tan\beta = \frac{J_{Oyz}-Mdy_C}{J_{Oxz}-Mdx_C} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{J_{Oyz}-Mdy_C}{J_{Oxz}-Mdx_C}\right) \text{ e } m_B = \frac{\sqrt{\left(J_{Oyz}-Mdy_C\right)^2+(J_{Oxz}-Mdx_C)^2}}{2Rd}$$

Resposta:

$$m_A = \frac{\sqrt{(J_{Oxz}+Mdx_C)^2+\left(J_{Oyz}+Mdy_C\right)^2}}{2Rd}\ ;\ \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{J_{Oyz}+Mdy_C}{J_{Oxz}+Mdx_C}\right)$$

$$m_B = \frac{\sqrt{\left(J_{Oyz}-Mdy_C\right)^2+(J_{Oxz}-Mdx_C)^2}}{2Rd};\ \beta = \tan^{-1}\left(\frac{J_{Oyz}-Mdy_C}{J_{Oxz}-Mdx_C}\right)$$