Mecânica I – PME3100

Aula 24
Capítulo 12 – Dinâmica dos Sólidos

12.1 – Energia Cinética de um Sólido

Mas, antes ...

Sobre um sistema de pontos P_i

10.2 – Teorema da Energia

Sabemos que o Teorema da Energia (Cinética), aplicado ao movimento do ponto material $\boldsymbol{P_i}$, de um sistema $\boldsymbol{S}$, se escreve:

$$\boxed{E - E_0 = \int_{P_0}^{P} \bar{F}.dP}$$

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 - \frac{1}{2}m_i v_{0i}^2 = \tau_{i_{ext}} + \tau_{i_{int}}$$

onde

$\tau_{i_{ext}} \Rightarrow$ trabalho das forças externas que atuam em $\boldsymbol{P_i}$

$\tau_{i_{int}} \Rightarrow$ trabalho das forças internas que atuam em $\boldsymbol{P_i}$

Escrevendo para todos os pontos $\boldsymbol{P_i}$ e somando membro a membro

$$\boxed{E - E_0 = \tau_{ext} + \tau_{int}}$$

Teorema da Energia (Cinética)

A variação da Energia Cinética de um sistema é igual ao trabalho de todas as forças (externas e internas), que atuam sobre ele.

10.2.1 – Observações

1. No caso de um sólido $\boxed{E - E_0 = \tau_{ext}}$

2. Forças cujos trabalhos são nulos ⇒ contato sem atrito e contato sem escorregamento

3. Trabalho realizado pelas forças peso de um sistema

$$\boxed{\tau = \int_{z_{G_0}}^{z_G} (-mg)dz_G = -mg\left(z_G - z_{G_0}\right)}$$

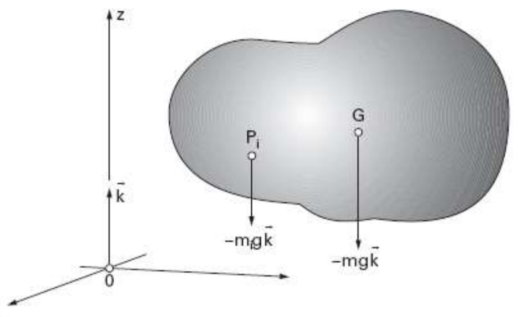


Figura 10.2 – Forças-peso de um sistema material

10.2.2 – Teorema de König

S $\Rightarrow$ sistema material cuja energia se deseja calcular

Considere um referencial auxiliar com origem no baricentro ***G***, de ***S***, cujos eixos têm direções fixas em relação ao referencial inercial.

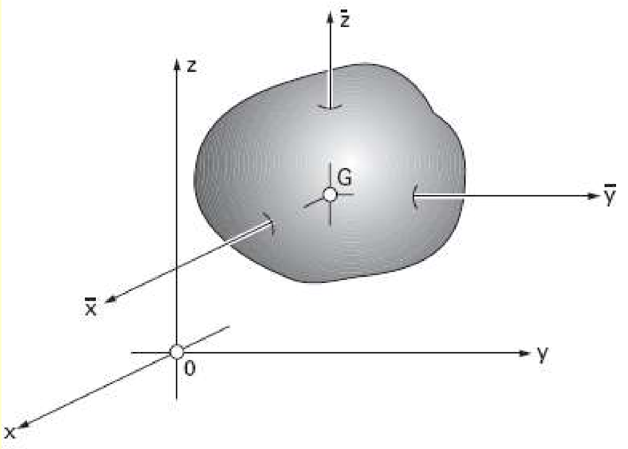


Figura 10.3 – Movimento de um sistema em relação a um referencial baricêntrico

Fonte: França, L. N. F. e Matsumura, A. Z. 2011, ***Mecânica Geral***, 3ª edição, Editora Edgard Blücher Ltda.

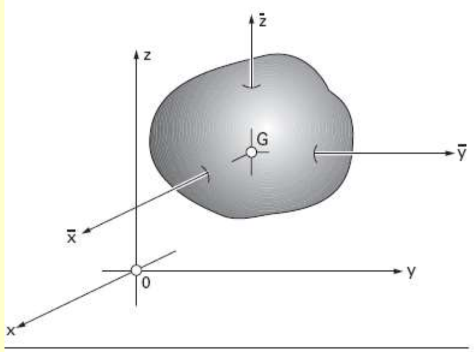
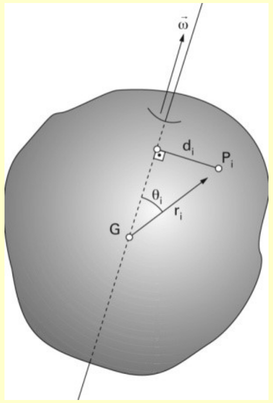


Figura 10.3 – *Movimento de um sistema em relação a um referencial baricêntrico*

$$P_i = G + \bar{r}_i$$



A velocidade de $\boldsymbol{P_i}$ pode ser escrita como:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_G + \dot{\bar{r}}_i$$

$\bar{v}_G$ $\Rightarrow$ Velocidade de ***G***

$\dot{\bar{r}}_i$ $\Rightarrow$ Velocidade de $\boldsymbol{P_i}$ em relação ao sistema auxiliar

A energia cinética do sistema ***S*** será

$$E = \frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_G^2 + \sum_i m_i \bar{v}_G \cdot \dot{\bar{r}}_i + \frac{1}{2}\sum_i m_i \left|\dot{\bar{r}}_i\right|^2$$

como

$$\bar{v}_G \cdot \sum_i m_i \dot{\bar{r}}_i = \bar{v}_G \cdot \sum_i m_i (\bar{v}_i - \bar{v}_G) = 0$$

$$\left(\sum_i m_i (P_i - G) = 0\right)$$

Definição de baricentro

então $$\boxed{E = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left|\dot{\vec{r}}_i\right|^2}$$

Teorema da König

*A energia cinética de um sistema material **S** , qualquer, é a soma da energia cinética obtida considerando toda massa **m**, do sistema, concentrada no seu baricentro, **G**, mais a energia cinética de **S** em relação a um referencial com origem em **G** e eixos de direções fixas, em relação ao referencial inercial.*

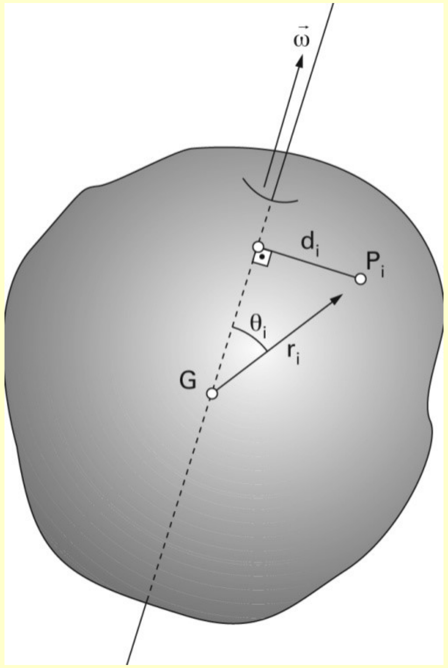
12.1 – Energia Cinética de um Sólido

Agora, voltemos ao
sólido ...

$$\bar{v}_i = \bar{v}_G + \bar{\omega} \wedge (P_i - G)$$

12.1 – Energia Cinética de um Sólido

Já vimos que (*slide* 7) $\dot{\bar{r}}_i = \bar{v}_i - \bar{v}_G = \bar{\omega} \wedge (P_i - G) = \bar{\omega} \wedge \bar{r}_i$



$$\left|\dot{\bar{r}}_i\right|^2 = \omega^2 r_i^2 sen^2\theta = \omega^2 d_i^2$$

Decorre que

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i\left|\dot{\vec{r}}_i\right|^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\omega^2 d_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i d_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 J_{G\omega}$$

Onde ω^2 é o quadrado do módulo do vetor de rotação de ***S*** e $J_{G\omega}$ é o momento de inércia de ***S*** em relação à reta $G\overline{\omega}$

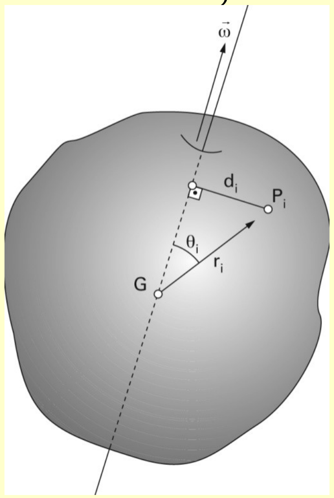
então $$E = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left| \dot{\bar{r}}_i \right|^2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \omega^2 J_{G\omega}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \omega^2 J_{G\omega}}$$

Comentário sobre o 2º termo da equação acima $$\Rightarrow \frac{1}{2} \omega^2 J_{G\omega} = \frac{1}{2} \bar{\omega}^T I_G \bar{\omega}$$

$$\bar{v}_G = \bar{v}_C + \bar{\omega} \wedge (G - C)$$

Quando o sólido possuir, num certo instante, um ponto ***C*** de velocidade nula, sua energia cinética terá, nesse instante, uma expressão mais simples



$$\bar{v}_G = \bar{\omega} \wedge (G - C) \qquad \Rightarrow \qquad v_G^2 = \omega^2 d^2$$

Onde d é a distância de ***G*** à reta $C\overline{\omega}$

$$E = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2}\omega^2 J_{G\omega} = \frac{1}{2} m\omega^2 d^2 + \frac{1}{2}\omega^2 J_{G\omega} = \frac{1}{2}\omega^2 (md^2 + J_{G\omega}) = \frac{1}{2}\omega^2 J_{C\omega}$$

Onde $J_{C\omega}$ é o momento de inércia de ***S*** em relação à reta $C\overline{\omega}$

Então no caso de $\bar{v}_C = \bar{0}$, decorre

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\omega^2 J_{C\omega} = \frac{1}{2}\bar{\omega}^T I_C \bar{\omega}}$$

Onde I_C é a matriz de inércia de ***S*** em relação a ***C***

E2 – P3 – 2° sem. 2009

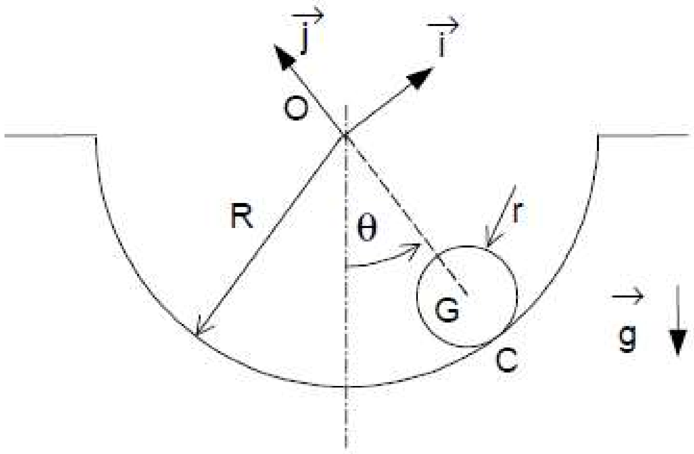
2ª Questão (3.0 pontos): Um disco homogêneo de massa m e raio r rola sem escorregar em uma superfície cilíndrica fixa de raio R. Pede-se:

a) Determine a energia cinética do disco em função de sua velocidade angular ω, em uma posição genérica θ. O momento de inércia do disco em relação ao seu centro de massa é $J_G = mR^2/2$.

b) Sabendo que o disco é liberado do repouso na posição onde $\theta = \theta_0$, determine sua velocidade angular $\vec{\omega}$ e a velocidade $\vec{v}_G$ de seu centro de massa em função de θ

c) Determine a relação entre a velocidade angular ω do disco e $\dot{\theta}$.

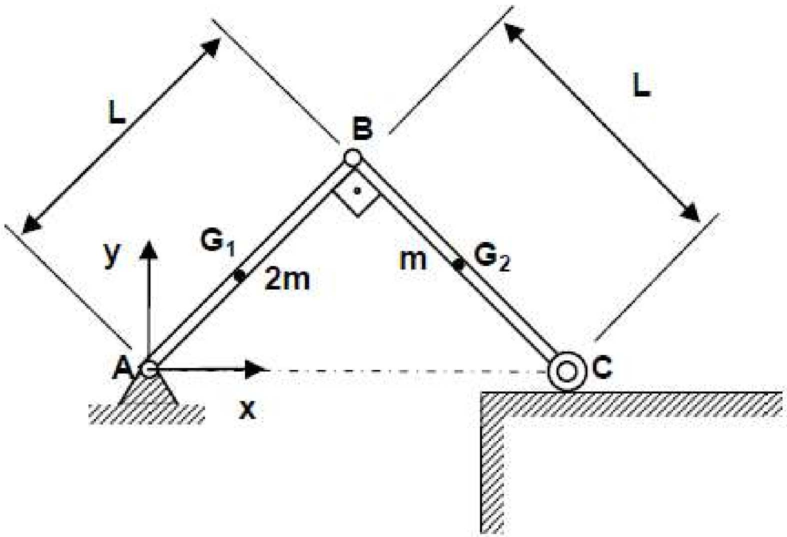
d) Determine a aceleração angular $\dot{\omega}$ em função de θ



* gabarito errado

E2 – P3 – 1º sem. 2010

QUESTÃO 2 (5 pontos): Considere o mecanismo ilustrado na figura, no qual as barras AB (homogênea, massa **2m** e baricentro **G_1**) e BC (homogênea, massa **m** e baricentro **G_2**) articulam-se em A e B. Ambas as articulações são ideais (isto é, sem atrito), sendo A fixa e B móvel. Na extremidade C da barra BC há um rolete que desliza sem atrito sobre uma superfície horizontal. Sabendo-se que o sistema parte do repouso na posição mostrada pedem-se:

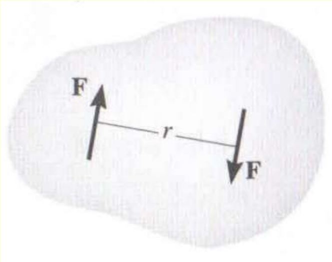


1. Para uma configuração genérica (ângulo $A\hat{B}C = \theta$):
(a) os diagramas de corpo livre das barras AB e BC;
2. Para o instante em que as barras estiverem alinhadas na horizontal:
(b) o trabalho realizado pelas forças atuantes no sistema desde a configuração inicial até a final, justificando os casos em que o trabalho for nulo;
(c) o vetor rotação $\vec{\omega}_{AB}$ da barra AB;
(d) o vetor rotação $\vec{\omega}_{BC}$ da barra BC.

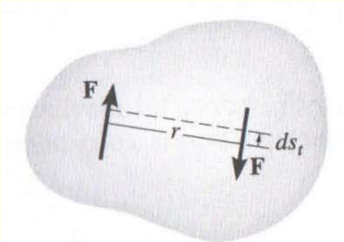
Utilize o sistema de referência inercial **Axyz** para a descrição dos vetores requeridos.
Dado, para uma barra delgada de comprimento L e massa m: $J_{Gz}=mL^2/12$.

X.Y – Trabalho de um Binário

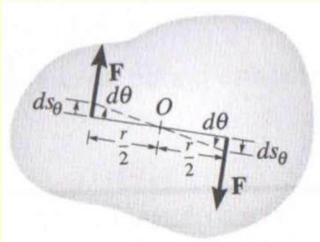
Sólido ***S*** em movimento plano geral (translação e rotação no plano)



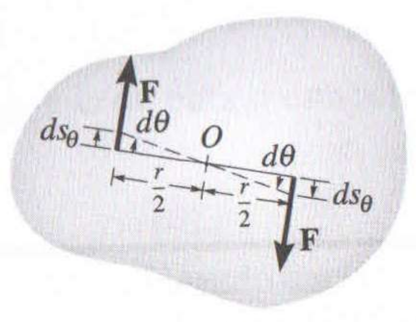
As forças do binário realizam trabalho *apenas* quando o corpo sofre *rotação*.



Translação



Rotação



Rotação

$$d\tau_M = F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) + F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) = (Fr)d\theta = Md\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\tau_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M.d\theta}$$

Trabalho do binário

Se o momento ***M*** do binário tem módulo constante, então $\Rightarrow$ $\boxed{\tau_M = M(\theta_2 - \theta_1)}$

E1 – P3 – 2º sem. 2008

1. (3,0 pts) A figura 1 mostra um trator de massa $2m$ que puxa uma carga de massa m apoiada sobre um plano inclinado. O coeficiente de atrito no contato entre a carga e o plano inclinado é μ. As 4 rodas do trator têm momentos de inércia desprezíveis e rolam sem escorregar. A cada roda é aplicado pelo motor do trator um momento $\vec{M} = -M\vec{k}$, $M > 0$, constante. Sabendo que o sistema parte do repouso pede-se calcular, após a carga ter percorrido uma distância ℓ sobre o plano inclinado:

   a) o trabalho realizado pela força de atrito atuante na carga;

   b) o trabalho realizado pelo peso da carga;

   c) o trabalho realizado pelas forças de atrito atuantes nas rodas do trator;

   d) o trabalho realizado pelos momentos aplicados nas 4 rodas do trator (considere que as 4 rodas têm o mesmo raio R);

   e) a velocidade do trator. Obs.: considere que a corda usada para puxar a carga é inextensível e está inicialmente esticada.

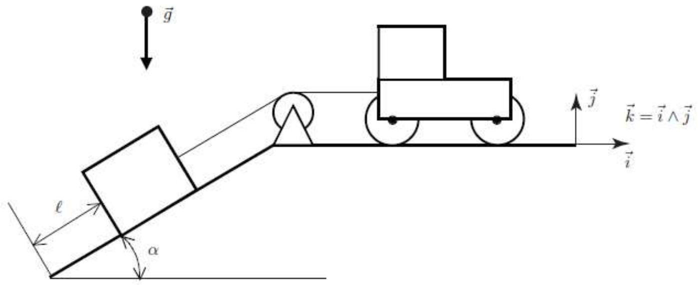


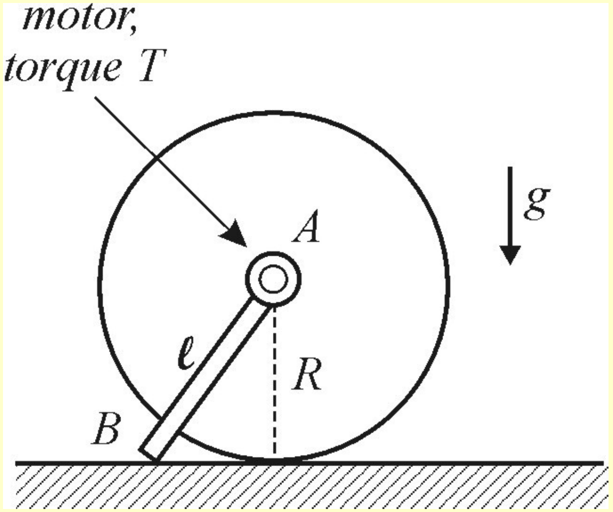
Figura 1: Trator puxando carga.

Exercício com uma informação a mais: criado pelo Prof. Ronaldo Salvagni.

Na extremidade *A* da barra *AB*, homogênea, de comprimento *l* e massa desprezível, há um pequeno motor elétrico que aplica um torque (binário) *T* no centro A do disco, fazendo este rolar sobre o plano horizontal, no sentido horário. O disco tem raio *R* e massa *M*. Sabendo que o disco rola sem escorregar e que não há atrito em B, calcule, em função de *T* e dos dados:

a) a aceleração angular do disco;

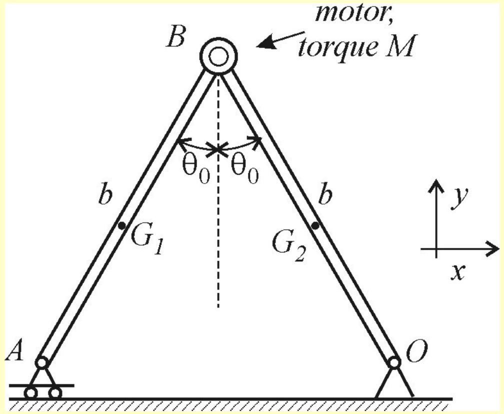
b) os esforços na barra AB.



Exercício com uma informação a mais: criado pelo Prof. Ronaldo Salvagni.

As duas barras homogêneas, de peso *mg* e comprimento *b*, movem-se num plano vertical. Na extremidade *B* da barra *AB*, há um pequeno motor elétrico que aplica um momento (binário) *M* na extremidade *B* da barra *BO*, fazendo esta girar em torno de *O* no sentido horário. As barras partem do repouso, da posição indicada na figura. Determine a velocidade do ponto *A* no instante em que ele coincide com o ponto *O*.

Resp. $$\boldsymbol{v_A^2 = \frac{3[2M\theta_0 - mgb(1-\cos\theta_0)]}{m}}$$



PERGUNTAS?