Exercícios - Cálculo IV - Aula 14 - Semana 23/11 - 27/11 **(atualizada: 10.12.2020)** Séries de Fourier: revisão e aprofundamento

1 Séries de Fourier - revisando

Lembrando que dada uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, para algum $L > 0$, **os coeficientes de Fourier** são dados por:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx \text{ para todo } n \geq 0,$$

e

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx \text{ para todo } n \geq 1.$$

Neste caso a **série de Fourier associada à** f fica

$$\boxed{s(x) = \frac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}).}$$

Vimos também que a identidade de Parseval (abaixo) nos ajuda a encontrar o valor de convergência de algumas séries numéricas mais complicadas.

Identidade de Parseval. Seja $L > 0$ e $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ com **série de Fourier** $s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$. Então,

$$\boxed{\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2).}$$

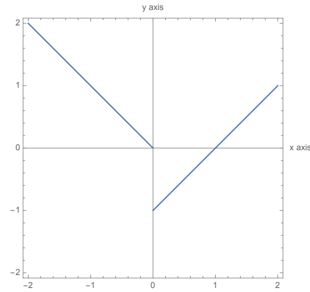
Vamos ver algumas aplicações desses resultados.

Exemplo. Considere $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} -x, -2 \leq x \leq 0 \\ x - 1, 0 < x \leq 2. \end{cases}$ Veja figura abaixo. Encontre a série de Fourier de f.

Resp. Para encontrar a série de Fourier associada à f precisamos calcular os coeficientes de Fourier. Neste caso $L = 2$ e a função nem é par, nem ímpar. Logo,

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\Big(\int_{-2}^{0} -xdx + \int_{0}^{2}(x-1)dx\Big) = \frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + (\frac{x^2}{2} - x)\Big|_{0}^{2}\Big) =$$

$= \frac{1}{2}(2 + 0) = 1$. Os coeficientes $a_n, n \geq 1$, são dados por:



$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{1}{2}\Big\{-\underbrace{\int_{-2}^{0} x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx}_{(A)} + \underbrace{\int_{0}^{2}(x-1)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx\Big\}}_{(B)}$$

Integrando por partes obtemos que:

$$\boxed{\int x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{2x}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2}) + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi x}{2}) + C}$$

Consequentemente, **a integral da parte** (A) **fica:**

$$\int_{-2}^{0} x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \underbrace{\frac{2x}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{-2}^{0}}_{(A_1)} + \underbrace{\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{-2}^{0}}_{(A_2)}.$$

A integral $(A_1) \equiv 0$ (faça as contas para conferir). A integral (A_2) fica:

$$\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{-2}^{0} = \frac{4}{n^2\pi^2}(1-\cos(-n\pi)) = \frac{4}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi)) =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, \text{n par} \\ \dfrac{8}{n^2\pi^2}, \text{n ímpar} \end{cases}$$

A parte (B) **da integral acima é dada por:**

$$\int_{0}^{2}(x-1)\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \underbrace{\int_{0}^{2} x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx}_{(B_1)} - \underbrace{\int_{0}^{2}\cos(\frac{n\pi x}{2})dx}_{(B_2)}.$$

A parte $(B_2) \equiv 0$(faça as contas!). Aplicando novamente a integração por partes na parte (B_1) obtemos:

$$\int_{0}^{2} x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx = \underbrace{\frac{2x}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{0}^{2}}_{(B_{1_1})} + \underbrace{\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{0}^{2}}_{(B_{1_2})}.$$

Novamente, a integral $(B_{1_1}) \equiv 0$. Na parte (B_{1_2}) temos

$$\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{0}^{2} = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi)-1) = \begin{cases} 0, \text{n par} \\ -\dfrac{8}{n^2\pi^2}, \text{n ímpar.} \end{cases}$$

Portanto, para $n \geq 1$ **os coeficientes**

$$a_n = \frac{1}{2}(-(A)+(B)) = \frac{1}{2}\begin{cases} 0+0, \text{n par} \\ -\frac{8}{n^2\pi^2} - \frac{8}{n^2\pi^2}, \text{n ímpar} \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{n par} \\ -\frac{8}{n^2\pi^2}, \text{n ímpar} \end{cases}$$

Vamos calcular agora os coeficientes de Fourier $b_n, n \geq 1$.

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{1}{2}\Big\{ \underbrace{\int_{-2}^{0} -x\sin(\frac{n\pi x}{2})dx}_{(C)} + \underbrace{\int_{0}^{2}(x-1)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx}_{(D)} \Big\}$$

Vamos lembrar que:

$$\boxed{\int -x\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = \frac{2x}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2}) - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x}{2}) + C}$$

Logo, a parte (C) da integral é igual a:

$$\int_{-2}^{0} -x\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = \underbrace{\frac{2x}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{-2}^{0}}_{(C_{1_1})} - \underbrace{\frac{4}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{-2}^{0}}_{(C_{1_2})}$$

Como já vimos, a integral $(C_{1_2}) \equiv 0$. A integral (C_{1_1}) fica então:

$$\frac{2x}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{-2}^{0} = 0 - (\frac{-4\cos(-n\pi)}{n\pi}) = \frac{4}{n\pi}(-1)^n.$$

Logo, a parte $\boxed{(C) = \frac{4}{n\pi}(-1)^n.}$

A integral (D) fica:

$$\int_{0}^{2}(x-1)\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = \underbrace{\int_{0}^{2} x\sin(\frac{n\pi x}{2})dx}_{(D_1)} - \underbrace{\int_{0}^{2}\sin(\frac{n\pi x}{2})dx}_{(D_2)}$$

A parte (D_1) da integral fica:

$$\int_{0}^{2} x\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = -\frac{2x}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{0}^{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{0}^{2} = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n$$

A integral (D_2) fica:

$$\int_{0}^{2}\sin(\frac{n\pi x}{2})dx = -\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\Big|_{0}^{2} = -\frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1)$$

Logo, a integral $\boxed{(D) = (D_1) - (D_2) = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1)}$

Portanto, para $n \geq 1$ os coeficientes

$$b_n = \frac{1}{2}((C)+(D)) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{n\pi}(-1)^n - \frac{4}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1)\right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi}((-1)^n - 1)) = \begin{cases} 0, \text{n par} \\ -\frac{2}{n\pi}, \text{n ímpar.} \end{cases}$$

Finalmente, os coeficientes de Fourier são:

$$a_0 = 1, \quad a_n = \begin{cases} 0, \text{n par} \\ -\dfrac{8}{n^2\pi^2}, \text{n ímpar} \end{cases} \quad , \quad b_n = \begin{cases} 0, \text{n par} \\ -\dfrac{2}{n\pi}, \text{n ímpar.} \end{cases}$$

Portanto a série de Fourier de f é:

$$\boxed{s(x) = \frac{1}{2} - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(\tfrac{(2n-1)\pi x}{2}) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(\tfrac{(2n-1)\pi x}{2})}$$

Lembre ainda que sendo f descontínua na origem o valor da série de Fourier $s(0) = \dfrac{\lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^-} f(x)}{2} = \dfrac{0-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercício. Aplique a identidade de Parseval na série acima para encontrar o valor da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$. (**Dica**: você vai precisar de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.)

Exercício. Utilizando a série acima encontre o valor de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Exercício. Encontre os polinômios de Fourier de f de ordem 2 e 3. Em seguida utilize algum software para fazer os gráficos de $F_2(x)$ e $F_3(x)$ e compare com o gráfico inicial de f.

Exercício. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \leq x < 0 \\ \sin(x), 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$. Encontre:

i) a série de Fourier de f.

ii) o valor de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

iii) o valor da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$(aplique a identidade de Parseval).

2 Extensões pares e ímpares de funções

Exemplo. Considere a função $f(x) = 2x$, $0 \leq x \leq 3$. Encontre uma série de Fourier de f que tenha somente senos.

Resp. Neste caso precisamos estender a função $f(x) = 2x$ no intervalo $[-3, 3]$ de forma que sua extensão seja uma função ímpar!

Veja que a própria função $f(x) = 2x$ é ímpar em $[-3, 3]$, então sua extensão digamos $g(x) = f(x)$, para todo $x \in [-3, 3]$.

Sendo a função ímpar, os coeficientes de Fourier $a_n = 0$, para todo $n \geq 0$, (Justifique essa passagem sem fazer as contas!).

Vamos calcular os $b_n, n \geq 1$.

Logo, $b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} 2x\sin(\frac{n\pi x}{3})dx = \frac{2}{3}\int_{-3}^{3} x\sin(\frac{n\pi x}{3})dx = \frac{4}{3}\int_{0}^{3} x\sin(\frac{n\pi x}{3})dx$, em que na última igualdade usamos o fato da função produto $x\sin(\frac{n\pi x}{3})$ ser par em $[-3,3]$. Usando integração por partes temos que

$$\int_0^3 x\sin(\frac{n\pi x}{3})dx = -\frac{3x}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{3})\Big|_0^3 + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x}{3})\Big|_0^3 = -\frac{9}{n\pi}(-1)^n + 0.$$

Consequentemente, $b_n = \frac{4}{3}\int_0^3 x\sin(\frac{n\pi x}{3})dx = \frac{4}{3}\left(\frac{9}{n\pi}(-1)^{n+1}\right) = \frac{12}{n\pi}(-1)^{n+1}$.

Portanto, a série de senos de f é:

$$\boxed{s(x) = \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(\frac{n\pi x}{3})}$$

Exercício. Encontre a série de cossenos da função acima.

Para fazer o exercício abaixo você vai precisar assistir a video aula do Possani, Aula 14, parte 4/4.

Exercício. Encontre os coeficientes a_1, a_2, a_3 tal que a integral abaixo tenha o menor valor possível

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x^2 - a_1\sin(x) - a_2\sin(2x) - a_3\sin(3x))^2dx.$$