Lista 8. Cadeias de Markov. Teorema Ergodico. (sexta 13/11/2020)

Exercício 1. Considere passeio aleatório simples em números inteiros $\{0, 1, \ldots, K\}, K \geq 2$ com transições $p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1}$, quando $i \neq 0, K$, e com condições de borda $p_{0,1} = p_{K,K} = p = 1 - p_{0,0} = 1 - p_{K,K-1}$. Consegue achar a probabilidade limite?

Solução: Seja $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_K)$ medida invariante. Observe, que seguinte relação é valida e pod ser inferida das equações de balanço global: para todo $i \in \{0, 1, \ldots, K\}$

$$\pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \pi_0,$$

de onde acha π_0 e expressão final

$$\pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{K+1}}.$$

□

Exercício 2.* Considere passeio aleatório simples X_n em números inteiros não negativos $\{0\} \cup \mathbb{N}$ com transições $p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1} > \frac{1}{2}$, quando $i \neq 0$, e com condições de reflexão na borda $p_{0,1} = p = 1 - p_{0,0}$. Sabemos que neste caso todos os estados são transitórios. Seja $p_i = \mathbb{P}(X_n \geq i, \text{ para todos } n > 0 \mid X_0 = i)$. Observe, que $p_0 = 1$ e $p_1 = p_2 = p_3 = \cdots < 1$. Achar probabilidade p_1.

Solução: Vamos tentar assim: seja b a probabilidade de volta para estado i "a direita", e seja a a probabilidade de passeio sair de estado e nunca mais voltar. Mais formal:

$$b = \mathbb{P}(\exists n \geq 1 \text{ tal que } X_n = i \text{ e } X_k > i \text{ para todo } k: \ 1 \leq k \leq n-1 \mid X_0 = i)$$
$$a = \mathbb{P}(X_k > i \text{ para todo } k \geq 1 \mid X_0 = i)$$

Assim

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b^n a = \frac{a}{1-b}$$

Mas para probabilidade p_0:

$$1 = p_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{1-q}\right)^n a = \frac{ap}{p-b} \tag{1}$$

para achar mais uma equação em a e b observe a estrutura de probabilidade a:

$$a = pp_1 \Rightarrow a = p\frac{a}{1-b} \Rightarrow b = q.$$

e logo de (1) obtemos

$$a = \frac{p-q}{p}$$

e finalmente

$$p_1 = \frac{a}{p} = \frac{p-q}{p^2}$$

□

Exercício 3. Seja X_n uma cadeia de Markov com espaço dos estados $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e matriz de transição a um passo P para dois casos:

$$P = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{vmatrix}, \qquad P = \begin{vmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{vmatrix}.$$

1. Comenta sobre a existência de probabilidade limite em ambos casos.

2. Se cadeia é ergódica achar a medida invariante. Achar pelo menos uma medida invariante caso existe várias.

Solução:

1. Comenta sobre a existência de probabilidade limite em ambos casos.

Primeira cadeia possue um estado absorvente, estado 4, que é acessível de todos os estados, então a probabilidade limite existe e converge para medida concentrada neste estado $\pi = (0, 0, 0, 1, 0)$.

Segunda cadeia é cadeia com duas classes de comunicação $C_1 = \{1, 2, 4\}$ e $C_2 = \{3, 5\}$, observando que estados da classe C_2 são acessíveis dos estados de classe C_1. Isso significa que estados da classe C_1 são transitórios e estados da classe C_2 são recorrentes. Então a medida invariante vai estar em casse C_2 e vai ser única.

2. Se cadeia é ergódica achar a medida invariante. Achar pelo menos uma medida invariante caso existe várias.

Em ambos os casos existe somente única medida invariante. Invariante da primeira cadeia é achada no item anterior. E invariante da segunda é solução de sistema das equações, mesmo as condições de teorema ergódica não são satisfeitas neste caso:

$$\begin{cases} \pi_3 = \dfrac{2}{3}\pi_3 + \dfrac{1}{3}\pi_5 \\ \pi_5 = \dfrac{1}{3}\pi_3 + \dfrac{2}{3}\pi_5 \\ 1 = \pi_3 + \pi_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_3 = \dfrac{1}{2} \\ \pi_5 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{1}{3}\pi_2 + \dfrac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_2 = \dfrac{1}{3}\pi_1 + \dfrac{1}{3}\pi_2 + \dfrac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_3 = \dfrac{2}{3}\pi_3 + \dfrac{1}{3}\pi_5 \\ \pi_4 = \dfrac{1}{3}\pi_1 + \dfrac{1}{3}\pi_2 + \dfrac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_5 = \dfrac{1}{3}\pi_1 + \dfrac{1}{3}\pi_3 + \dfrac{1}{4}\pi_4 + \dfrac{2}{3}\pi_5 \\ 1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \\ \pi_3 = \dfrac{1}{2} \\ \pi_4 = 0 \\ \pi_5 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

□

Exercício 4. Suponha que em uma linha de montagem final para carros haja o seguinte conjunto de regras:

- Dois conversíveis não podem jamais se seguirem na linha, porque o conteúdo de trabalho desequilibraria a linha.
- Uma perua deve ser seguida de um sedan para equilibrar a linha.
- Um sedan tanto pode ser seguido por uma perua como por um conversível, mas não por um sedan.

Somente esses três modelos são fabricados nessa linha. Monte uma matriz de transição possível para essas regras, inserindo as letras $a, b, c, d, \dots$ etc., para os valores que não são numericamente definidos pelas regras acima.

1. Se tivesse um programa de produção dado por vetor de proporção de cada tipo de carro a ser feito em um mês, como poderia se determinar uma sequência de probabilidades que correspondesse ao programa e às regras das sequências fornecidas neste problema?
2. Suponha que se firmou um contrato para se entregar 10000 carros ao final de um mês. Desses 10000, aproximadamente 50% tinham que ser sedan, 10% tinham que ser perua e 40% conversível. Determine alguma regra de programação de probabilidade que assegure essa produção e que ainda corresponda às regras deste problema.

Solução: Seja $E = \{C, S, P\}$ conjunto de estados (C="na linha conversível", S="na linha sedan", P="na linha perua"). As regras sugerem, que

$$p_{CC} = 0,\ p_{PS} = 1,\ p_{SS} = 0$$

então a matriz de transição

$$\begin{pmatrix} p_{CC} & p_{CS} & p_{CP} \\ p_{SC} & p_{SS} & p_{SP} \\ p_{PC} & p_{PS} & p_{PP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_{CS} & p_{CP} \\ p_{SC} & 0 & p_{SP} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ b & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Se tivesse um programa de produção dado por vetor de proporção de cada tipo de carro a ser feito em um mês, como poderia se determinar uma sequência de probabilidades que correspondesse ao programa e às regras das sequências fornecidas neste problema?

A proporção tem que ser igual a medida invariante e satisfazer o sistema

$$\begin{cases} \pi_C = b\pi_S \\ \pi_S = a\pi_C + \pi_P \\ \pi_P = (1-a)\pi_C + (1-b)\pi_S \\ \ \ 1 = \pi_C + \pi_S + \pi_P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_C = b\pi_S \\ \pi_P = ab\pi_S \\ \ \ 1 = \pi_C + \pi_S + \pi_P \end{cases}$$

então dado o plano (x, y, z) (em que $x + y + z = 1$) as probabilidades a e b vão ser

$$b = \frac{x}{y},\ ab = \frac{z}{y} \Rightarrow a = \frac{z}{x}$$

observe que só pode ser porcentagem onde $z < x < y$.

2. Suponha que se firmou um contrato para se entregar 10000 carros ao final de um mês. Desses 10000, aproximadamente 50% tinham que ser sedan, 10% tinham que ser perua e 40% conversível. Determine alguma regra de programação de probabilidade que assegure essa produção e que ainda corresponda às regras deste problema.

Pelo item anterior, dado plano $(x, y, z) = (0.4, 0.5, 0.1)$ obtemos direto

$$b = \frac{4}{5},\ a = \frac{1}{4},$$

o seja, a matriz deve ser

$$\begin{pmatrix} p_{CC} & p_{CS} & p_{CP} \\ p_{SC} & p_{SS} & p_{SP} \\ p_{PC} & p_{PS} & p_{PP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_{CS} & p_{CP} \\ p_{SC} & 0 & p_{SP} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ b & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Exercício 5. Para um processo de ramificação, encontre a probabilidade de extinção π_0 quando

1. $p_0 = 1/4, p_2 = 3/4$;
2. $p_0 = 1/6, p_1 = 1/2, p_3 = 1/3$.

Supomos que $X_0 = 1$. Achar a média e a variância de X_n para ambos os processos?

Solução:

1. $p_0 = 1/4, p_2 = 3/4$;

a probabilidade de extinção, π_0, é a minimal (em intervalo $[0, 1]$) solução da seguinte equação

$$\pi_0 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\pi_0^2$$

logo

$$3\pi_0^2 - 4\pi + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \pi_0 = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{1}{3} \text{ e } 1.$$

assim, $\pi_0 = \frac{1}{3}$.

2. $p_0 = 1/6, p_1 = 1/2, p_3 = 1/3$

a probabilidade de extinção, π_0, é a minimal solução do seguinte equação

$$\pi_0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_0^3 \Rightarrow 0 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_0^3 \Rightarrow 2\pi_0^3 - 3\pi_0 + 1 = (\pi_0 - 1)(2\pi_0^2 + 2\pi_0 - 1) = 0$$

logo

$$2\pi_0^2 + 2\pi - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \pi_0 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } 1.$$

assim, $\pi_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cong 0.37$. $\square$

Exercício 5. ([2], p.234) *Modelo de difusão de Ehrenfest.* Suponha que se tenha um recipiente com uma membrana que o separa em compartimentos A e B. Inicialmente, há j moléculas no compartimento A e $a - j$ no compartimento B. Diz-se que ocorre uma *transição* sempre que uma molécula atravessa a membrana (tanto de A para B como de B para A). Seja X_n o número de moléculas no comportamento A após n transições. Em cada transição, X_n aumenta ou diminui em exatamente uma molécula. Suponha que a probabilidade de que uma molécula mude de compartimento seja proporcional ao número de moléculas no compartimento de onde saiu tal molécula. Monte um modelo de uma cadeia de Markov desse processo de difusão. O que pode dizer sobre a medida invariante do processo? Falam que a medida invariante existe e ela é distribuição binomial. Confere?

Solução: $X_n \in \{0, 1, \dots, a\}$ probabilidades de transição pelo anunciado são

$$p_{i,i-1} = \frac{i}{a},\ p_{i,i+1} = 1 - \frac{i}{a},\ \text{para } i = 1, \dots, a-1,\ \text{e}\ \ p_{0,1} = p_{a,a-1} = 1.$$

a medida invariante achamos de sistema das equações

$$\begin{cases} \pi_0 = \dfrac{1}{a}\pi_1 \\ \pi_i = \dfrac{i+1}{a}\pi_{i+1} + \left(1 - \dfrac{i-1}{a}\right)\pi_{k-1} \\ \pi_a = \dfrac{1}{a}\pi_{a-1} \end{cases}$$

logo, observamos que existe a relação:

$$\pi_k = \binom{a}{k}\pi_0.$$

e facil de ver que

$$\pi_k = \binom{a}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^a$$

que é distribuição binomial $B(a, \frac{1}{2})$. $\square$

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.

[2] A.B.Clarke, R.L.Disney (1979) *Probabilidade e processos estocásticos.* Capítulo 8.