Lista 6. Processo de Poisson. Aplicações. (sexta 30/10/2020)

Exercício 1*. (2 pontos adicionais) Seja $N(\cdot)$ um Processo de Poisson com a taxa $\lambda(\cdot)$. Supomos que no intervalo [0,2] a taxa $\lambda(t)$ coincide com a parabola: $\lambda(t) = 4 - t^2$. Seja T_1 o tempo de ocorrência de primeiro evento. Achar

1. a distribuição de T_1 dados que $N(2) = 1$, e esperança dela;
2. a distribuição de T_1 dados que $N(2) = 2$, e esperança dela.

Solução:

1. Achar a distribuição de T_1 dados que $N(2) = 1$, e esperança dela.

Seguindo o mesmo raciocínio em caso de processo homogêneo: seja

$$m(t) = \int_0^t (4 - s^2)ds = 4t - \frac{t^3}{3}$$

achamos a distribuição conjunta

$$F(t) = \frac{\mathbb{P}(\text{um evento em } (0,t])\mathbb{P}(\text{nenhum evento em } (t,2])}{\mathbb{P}(\text{um evento em } (0,2])} = \frac{m(t)e^{-m(t)}e^{-(m(2)-m(t))}}{m(2)e^{-m(2)}} = \frac{m(t)}{m(2)}$$

$$f(t) = \frac{(m(t))'}{m(2)} = \frac{\lambda(t)}{m(2)} = \frac{4-t^2}{16/3}, \quad t \in (0,2).$$

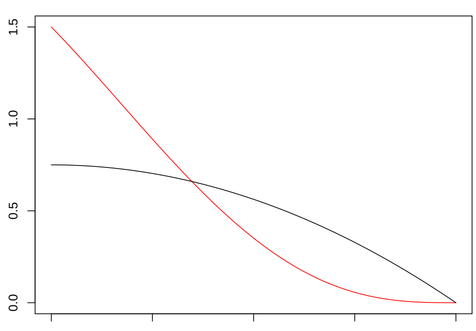
1. Achar a distribuição de T_1 dados que $N(2) = 2$, e esperança dela.

$$\bar{F}(t) = \mathbb{P}(T_1 > t \mid N(2) = 2) = \frac{\mathbb{P}(\text{nenhum evento em } (0,t])\mathbb{P}(\text{dois eventos em } (t,2])}{\mathbb{P}(\text{dois eventos em } (0,2])}$$

$$= \frac{e^{-m(t)}(m(2)-m(t))^2 e^{-(m(2)-m(t))}}{m^2(2)e^{-m(2)}} = \frac{(m(2)-m(t))^2}{m^2(2)} = \left(1 - \frac{m(t)}{m(2)}\right)^2$$

$$F(t) = 1 - \left(1 - \frac{m(t)}{m(2)}\right)^2$$

$$f(t) = \frac{2\lambda(t)}{m(2)}\left(1 - \frac{m(t)}{m(2)}\right), \quad t \in (0,2).$$



□

Exercício 2. Seguindo o item anterior, estendemos a função em toda reta

$$\lambda(t) = \begin{cases} 4 - t^2, \ t \in [0,2], \\ 4 - (t-4k)^2, \ k = 1, 2, \ldots, \ t \in [4k-2, 4k+2], \end{cases}$$

Seja $N(\cdot)$ processo de Poisson com essa taxa definida $\lambda(t), \ t \geq 0$.

1. Em termos de funções o-pequenos representa a probabilidade de $\mathbb{P}(N(2+h) - N(2) = 1)$.
2. Em termos de funções o-pequenos representa a probabilidade de $\mathbb{P}(N(4+h) - N(4) = 1)$.
3. Consideremos dois incrementos: $X = N(6) - N(2)$ e $Y = N(4)$. Achar covariância $Cov(X,Y)$.

Solução:

1. Em termos de funções o-pequenos representa a probabilidade de $\mathbb{P}(N(2+h) - N(2) = 1)$.

   Sabemos:

$$\mathbb{P}(N(t+h) - N(t)) = \lambda(t)h + o(h).$$

Então, usando direto:

$$\mathbb{P}(N(2+h) - N(t)) = \lambda(2)h + o(h) = o(h).$$

2. Em termos de funções o-pequenos representa a probabilidade de $\mathbb{P}(N(4+h) - N(4) = 1)$.

   usando direto:

$$\mathbb{P}(N(2+h) - N(t)) = \lambda(4)h + o(h) = 4h + o(h).$$

3. Consideremos dois incrementos: $X = N(6) - N(2)$ e $Y = N(4)$. Achar covariância $Cov(X,Y)$.

$$\begin{aligned} X &= N(6) - N(2) = (N(6) - N(4)) + (N(4) - N(2)) =: X_1 + Z, \\ Y &= N(4) = (N(4) - N(2)) + N(2) =: Z + Y_1 \end{aligned}$$

Então

$$Cov(X,Y) = Cov(X_1 + Z, Z + Y_1) = Cov(X_1, Z) + Cov(X_1, Y_1) + Cov(Z, Z) + Cov(Z, Y_1) = \mathbb{V}ar(Z)$$

Lembrando $Z = N(4) - N(2) \sim Poi\left(\int_2^4 \lambda(s)ds\right)$ e

$$\mathbb{V}ar(Z) = \mathbb{E}(Z) = \int_2^4 \lambda(s)ds = \int_2^4 \left(4 - (s-4)^2\right) ds = \int_0^2 (4 - s^2)ds = \frac{16}{3}.$$

□

Exercício 3. Sejam $N_1(\cdot)$ e $N_2(\cdot)$ dois processos de Poisson independentes com taxas $\lambda_1(t) = 1 + \sin^2(t)$ e $\lambda_2(t) = 1 + \cos^2(t)$, respectivamente. Prove, que o processo $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ é o processo de Poisson. Achar a taxa do processo. O processo $N(\cdot)$ é processo homogêneo ou não-homogêneo? Achar a covariância $Cov(N(2\pi), N_1(2\pi))$.

Solução: N é processo de Poisson homogêneo com a taxa

$$\lambda = 1 + \sin^2(t) + 1 + \cos^2(t) = 3.$$

calculamos covariância

$$\begin{aligned} Cov(N(2\pi), N_1(2\pi)) &= Cov(N(2\pi)_1 + N_2(2\pi), N_1(2\pi)) = Cov(N(2\pi)_1, N_1(2\pi)) + Cov(N_2(2\pi), N_1(2\pi)) \\ &= \mathbb{V}ar(N_1(2\pi)) = \mathbb{E}(N_1(2\pi)) = \int_0^{2\pi}(1+\sin^2(t))dt = 2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 3\pi \end{aligned}$$

□

Exercício 4. Consideremos processo de Poisson X composto com a taxa λ e com incrementos $Y_i = \pm 1$ com probabilidades $1/2$.

1. Achar a probabilidade $\mathbb{P}(X(t) = 0)$.
2. Achar a média $\mathbb{E}(X(t))$.
3. Achar a variância $\mathbb{V}ar(X(t))$.

Solução:

1. Achar a probabilidade $\mathbb{P}(X(t) = 0)$.

lembrando que, quando $N(t)$ é processo de Poisson com taxa λ, então

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

logo

$$\mathbb{P}(X(t) = 0) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(X(t) = 0 \mid N(t))) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \binom{2k}{k} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2},$$

em que $0! = 1$.

2. Achar a média $\mathbb{E}(X(t))$.

$\mathbb{E}(X(t)) = 0$

3. Achar a variância $\mathbb{V}ar(X(t))$.

$$\mathbb{V}ar(X(t)) = \lambda t \mathbb{E}(Y_1^2) = \frac{\lambda t}{2}.$$

□

Exercício 5. Chegadas de e-mails em um distribuidor forma um processo de Poisson $N(t)$ com taxa λ. Cada e-mail vai ser classificado em: *pesado*, se o tamanho dele for maior do que 1Mg, e *leve*, se o tamanho dele menor do que 1 Mg. Os tamanhos (em Mg) dos e-mails são independentes e seguem distribuição exponencial com intensidade 1.

1. Qual é a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram até o tempo t, se sabemos que $N(t) = n$?
2. Qual é a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram em em intervalo de tempo $(t, t+s)$?
3. Qual é a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram em em intervalo $(t, t+s)$, sabendo que $N(t) = n$?

Solução:

1. Qual é a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram até o tempo t, se sabemos que $N(t) = n$?

Seja $\xi \sim \exp(1)$. A probabilidade de um e-mail classificado como leve (ou pesado) é

$$p = \mathbb{P}(\text{e-mail que chegou é leve}) = \mathbb{P}(\xi \le 1) = 1 - e^{-1} = 1 - \mathbb{P}(\text{e-mail que chegou é pesado})$$

Assim, o número de e-mails pesados que chegaram até t, dado que número total de e-mails é n, tem a distribuição binomial com parâmetros n e probabilidade de sucesso e^{-1}.

2. Qual é a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram em em intervalo de tempo $(t, t+s)$?

Chegada de e-mail pesados (e leves) forma processo de Poisson com a taxa $\frac{\lambda}{e}$ formando processo homogêneo, então, número de e-mails pesados que chegaram em em intervalo de tempo $(t, t+s)$ tem distribuição de Poisson com a média proporcional a tamanho do intervalo

$$\frac{\lambda}{e} t.$$

3. Qual é a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram em em intervalo $(t, t+s)$, sabendo que $N(t) = n$?

Porque os incrementos são independentes, a distribuição do número de e-mails pesados que chegaram em em intervalo $(t, t+s)$, sabendo que $N(t) = n$ é (como no item anterior) a distribuição de Poisson com a média proporcional a tamanho do intervalo $\frac{\lambda}{e} t$.

□

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.