Lista 4. Processo de Poisson. Definição. (sexta 09/10/2020)

Exercício 1. Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias independentes assumindo valores inteiros não-negativos. Suponha que X_1 e $X_1 + X_2$ tem distribuição de Poisson com parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Mostre que a distribuição de X_2 é a distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. (Hint: *mais simples, provavelmente, é através de função geradora do momentos. Mas pode ser provado direto: usando* $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 0)$ *ache* $\mathbb{P}(X_2 = 0)$, *e depois usando indução matemática prove a fórmula para* $\mathbb{P}(X_2 = n)$)

Solução:

Seja $X \sim Poi(\lambda)$, então a função geradora $\phi_X(z) := \mathbb{E}(z^X) = e^{\lambda(z-1)}$: logo

$$e^{\lambda_2(z-1)} = \phi_{X_1+X_2}(z) = \phi_{X_1}(z)\phi_{X_2}(z) = e^{\lambda_2(z-1)}\phi_{X_2}(z) \implies \phi_{X_2}(z) = e^{(\lambda_2-\lambda_1)(z-1)}.$$

E depois, claro, precisamos saber que a matriz geradora determine unicamente determina a distribuição.

Ou de outro jeito:

$$e^{-\lambda_2} = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0) = e^{-\lambda_1}\mathbb{P}(X_2 = 0) \implies \mathbb{P}(X_2 = 0) = e^{-(\lambda_2-\lambda_1)}$$

supomos que para todos $k = 0, 1, \dots, n-1$ a formula $\mathbb{P}(X_2 = k) = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)^k}{k!}e^{-(\lambda_2-\lambda_1)}$ é valida. Provamos que ela vale para $k = n$, ou seja, provamos que $\mathbb{P}(X_2 = n) = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)^n}{n!}e^{-(\lambda_2-\lambda_1)}$. Realmente,

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_2^n}{n!}e^{-\lambda_2} = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X_1 = n-k)\mathbb{P}(X_2 = k) + \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_1^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_1}\frac{(\lambda_2-\lambda_1)^k}{k!}e^{-(\lambda_2-\lambda_1)} + e^{-\lambda_1}\mathbb{P}(X_2 = n) \\
&= \frac{e^{-\lambda_2}}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\lambda_1^{n-k}(\lambda_2-\lambda_1)^k + e^{-\lambda_1}\mathbb{P}(X_2 = n) \\
&= \frac{e^{-\lambda_2}}{n!}\big((\lambda_1 + (\lambda_2-\lambda_1))^n - (\lambda_2-\lambda_1)^n\big) + e^{-\lambda_1}\mathbb{P}(X_2 = n) \\
\implies & -\frac{e^{-\lambda_2}}{n!}(\lambda_2-\lambda_1)^n e^{-\lambda_1}\mathbb{P}(X_2 = n) = 0 \\
\implies & \mathbb{P}(X_2 = n) = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)^n}{n!}e^{-(\lambda_2-\lambda_1)}.
\end{aligned}$$

□

Exercício 2. Seja $N(t)$ um processo de Poisson com média de 3 ocorrências por minuto. Considere 5 ocorrências sucessivas desse processo e determine a probabilidade de que nenhum intervalo entre elas seja superior a 30 segundos.

Solução: Cinco ocorrências são formadas pelas $T_1, \dots, T_5 \sim \exp\left(\frac{1}{3}\right)$ (tempo em minutos). A probabilidade que procuramos é

$$\mathbb{P}(T_1 < 0.5, \dots, T_5 < 0.5) = (1 - e^{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}})^5 \cong 8.527081 \times 10^{-5}$$

□

Exercício 3. $N_1(t)$ e $N_2(t)$ são dois processos de Poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2, respectivamente. Qual é a probabilidade de que a 1^a ocorrência do processo $N_1(t)$ ocorra antes da 1^a ocorrência de $N_2(t)$?

Solução: Sejam X_1 e X_2 tempos da primeira ocorrência de processos N_1 e N_2 respectivamente. Segundo anunciado $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$ e $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$, então

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

□

Exercício 4. Passageiros chegam a um ponto final de ônibus de acordo com um processo de Poisson $N(\cdot)$ com média de 3 (passageiros) por minuto. Suponha que um ônibus partiu no instante inicial e não deixou nenhum passageiro na fila. Seja T o tempo que decorre para chegar o próximo ônibus e suponha que T é independente do processo e tem distribuição uniforme no intervalo $(9, 11)$ (minutos). Calcule a média e a variância de $N(T)$.

Solução: Lembrando que $T \sim U[9, 11]$: $\mathbb{E}(T) = 10, \mathbb{V}ar(T) = \frac{1}{3}$

$\lambda = 3$ e tempo em minutos:

$$\mathbb{E}(N(T)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(N(T) \mid T) = \mathbb{E}(3T) = 3 \cdot 10 = 30 \text{ passageiros}$$

$$\mathbb{V}ar(N(T)) = \mathbb{V}ar(\mathbb{E}(N(T) \mid T)) + \mathbb{E}(\mathbb{V}ar(N(T) \mid T)) = \mathbb{V}ar(3T) + \mathbb{E}(3T) = \frac{9}{3} + 30 = 33$$

□

Exercício 5. Seja $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Poisson com taxa λ=15. Calcule:

1. $\mathbb{P}(N(6) = 9)$
2. $\mathbb{P}(N(6) = 9, N(20) = 13, N(56) = 27)$

Solução: Primeiro item direto. Segundo direto representando

$$\mathbb{P}(N(6) = 9, N(20) = 13, N(56) = 27) = \mathbb{P}(N(6) = 9)\mathbb{P}(N(20) - N(6) = 4)\mathbb{P}(N(56) - N(20) = 14)$$

□

Exercício 6. O fluxo de consumidores numa loja é descrito por um processo de Poisson com taxa de 25 consumidores por hora. Sabe-se que a proporção de consumidores do sexo feminino é de 80%. Qual é a probabilidade que nenhum consumidor homem entre nessa loja durante um intervalo de próximos 15 minutos?

Solução: Fluxo dos homens forma processo de Poisson com taxa de 20% de 25, ou com taxa $25 \cdot 0.2 = 5$ homens por hora. Assim, seja T tempo de chegada de primeiro homen

$$\mathbb{P}(T > \frac{1}{4}) = e^{-5 \cdot \frac{1}{4}} \cong 0.29.$$

□

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.