Integral dupla: Coordenadas polares

Coordenadas Polares

Um ponto $P = (x, y)$ do plano fica completamente determinado se soubermos a distância r de P à origem $O = (0, 0)$ e o ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$, medido no sentido anti-horário e a partir do semi-eixo positivo das abcissas, entre este semi-eixo e a reta determinada por P e por O. Definimos a seguinte transformação

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,sen\,\theta$$

onde $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Esta transformação é chamada de transformação de coordenadas polar, é injetora, e de classe C^1. Temos o seguinte:

Mudança de variável

Teorema

$$\int\int_B f(x,y)\,dxdy = \int\int_{B_{r,\theta}} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, drd\theta$$

onde $B_{r,\theta}$ é o conjunto B escrito em coordenadas polares.

Exemplo

Calcule

$$\iint_B \cos(x^2+y^2)\,dxdy$$

onde $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

solução: Fazendo a mudança de variável $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$ temos que $x^2+y^2 = r^2$ e que B em coordenadas polares é igual a $B_{r,\theta} = [0,2\pi] \times [0,1]$. Portanto

$$\iint_B \cos(x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{B_{r,\theta}} \cos(r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \cos(r^2)\,r\,dr\right)d\theta = 2\pi\left(\frac{1}{2}sen\,(r^2)\right)\Big|_0^1 = \pi\,sen\,(1)$$

Exemplo

Calcule

$$\int\int_B \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

onde $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 4\}.$

solução: Fazendo a mudança de variável $x = r\cos\theta,\ y = r\,sen\,\theta$ temos que $\sqrt{x^2+y^2} = r$ e B em coordendas polares é igual a $B_{r,\theta} = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,2]$. Portanto

$$\int\int_B \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int\int_{B_{r,\theta}} r\ rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 drd\theta = \frac{\pi}{2}\frac{r^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}\pi$$

Exemplo

Use coordenadas polares na integral dupla para calcular a área de

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\, y \geq 0,\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

solução: Temos que a área de B, $A(B)$ é igual a

$$A(B) = \int\int_B dxdy$$

e B em coordenadas polares é igual a $B_{r,\theta} = [0, \pi] \times [2, 3]$.
Portanto

$$A(B) = \int\int_B dxdy = \int\int_{B_{r,\theta}} rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_2^3 rdrd\theta = \pi \frac{r^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{5}{2}\pi$$

Exemplo

Calcule

$$\int\int_B x dx dy$$

onde $B = \{(x, y); x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

solução: Fazendo a mudança de coordenada $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$ e B em coordenadas polares é igual a $B_{r,\theta} = [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, 1]$. Portanto

$$\int\int_B x dx dy = \int\int_{B_{r,\theta}} r\cos\theta\, r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 r^2 \cos\theta\, dr d\theta = sen\,\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Exemplo

Sejam $a > 0$ e $b > 0$ fixos. Mostre que a área da elípse

$$E_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

é πab.

solução: Temos que a área de $E_{a,b}$ é

$$A(E_{a,b}) = \int\int_{E_{a,b}} dxdy$$

Agora, fazemos a mudança de variável

$$\frac{x}{a} = r\cos\theta, \quad \frac{y}{b} = r\,sen\,\theta$$

Temos que esta mudança transforma $E_{a,b}$ em $B_{r,\theta} = [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Como esta mudança é uma modificação das coordenadas polares então na integral trocamos $drd\theta$ por $abrdrd\theta$. Deste modo,

$$A(E_{a,b}) = \int\int_{E_{a,b}} dxdy = \int\int_{B_{r,\theta}} abrdrd\theta$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \int_0^1 rdrd\theta = \pi ab$$