Integral de Linha de um campo vetorial

Campo vetorial no plano

Definição

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Uma função $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ é chamado um campo vetorial. Notemos que podemos esrever

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

onde $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$. Em notação vetorial escrevemos

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

onde $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$ os vetores canônicos de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que $\vec{F}$ é de classe C^k, quando P e Q forem de classe C^k.

Exemplo

A) $\vec{F}(x, y) = (x, y^2) = x\vec{i} + y^2\vec{j}$

B) $\vec{F}(x, y) = (0, 1) = \vec{j}$

C) $\vec{F}(x, y) = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$

D) $\vec{F}(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\vec{j}$

E) $\vec{F}(x, y) = \cos(xy)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}.$

A integral de um campo vetorial sobre uma curva

Definição

Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *aberto,* $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, com*

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

um campo vetorial contínuo e $\gamma : [a, b] \to \Omega$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$*, uma curva de classe* C^1*. Definimos a integral de linha de* $\vec{F}$ *sobre* γ *por*

$$\int_\gamma \vec{F} d\gamma = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)).\gamma'(t) dt$$

$$= \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)dt + Q(x(t), y(t))y'(t)dt$$

Observação:

A) Uma interpretação física para integral de linha de um campo vetorial sobre uma curva, é pensar que o campo $\vec{F}$ é um campo de forças atuando em Ω e que uma partícula descreve um movimento em Ω com função de posição dada por γ. A integral de linha de $\vec{F}$ é o trabalho realizado por $\vec{F}$ de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$.

B) Uma outra notação para a integral de linnha de um campo $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ é:

$$\int_\gamma P\, dx + Q\, dy$$

Calcule

$$\int_{\gamma} x^2 dx + y^3 dy$$

onde $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.
solução: Temos que $x(t) = t$ e $y(t) = t^2$, segue que $x'(t) = 1$ e $y'(t) = 2t$. Daí

$$\int_{\gamma} x^2 dx + y^3 dy = \int_0^1 [t^2 x'(t) + t^6 y'(t)] dt$$

$$= \int_0^1 t^2 dt + 2t^7 dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^8}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{12}$$

Exemplo

Calcule

$$\int_\gamma (x^2 + y^2)dx + ydy$$

onde $\gamma(t) = (\cos t, sen\, t), \ t \in [0, 2\pi]$.

solução: Temos que $x(t) = \cos t$ e $y(t) = sen\, t$, seque que $x'(t) = -sen\, t$ e $y'(t) = \cos t$. Daí

$$\int_\gamma (x^2 + y^2)dx + ydy = \int_0^{2\pi} [(\cos^2 t + sen^2\, t)x'(t) + sen\, t\, y'(t)]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -sen\, t\, dt + sen\, t \cos t\, dt = -\int_0^{2\pi} sen\, t\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} sen\, 2t\, dt = 0$$

Definição

Se $\gamma : [a, b] \to \Omega$ *uma curva* C^1 *por partes, isto é, existe uma partição* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *e curvas* $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, \cdots, n$ *de classe* C^1 *e* $\gamma(t) = \gamma_i(t)$, *para* $t \in]t_{i-1}, t_i[$. *Neste caso, se* $\vec{F}$ *é um campo vetorial contínuo em* Ω, *definimos*

$$\int_\gamma \vec{F} d\gamma = \int_{\gamma_1} \vec{F} d\gamma_1 + \cdots + \int_{\gamma_n} \vec{F} d\gamma_n$$

Exemplo

Calcule

$$\int_\gamma x dx + y dy$$

onde $\gamma(t) = (t, |t|)$, $-1 \leq t \leq 1$.

Temos que

$$\int_\gamma xdx + ydy = \int_{\gamma_1} xdx + ydy + \int_{\gamma_2} xdx + ydy$$

onde $\gamma_1(t) = (t, -t)$, $-1 \leq t \leq 0$ e $\gamma_2(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\int_{\gamma_1} xdx + ydy = \int_{-1}^{0} 2tdt = t^2\Big|_{-1}^{0} = -1$$

e

$$\int_{\gamma_2} xdx + ydy = \int_0^1 2tdt = 1$$

Portanto,

$$\int_\gamma xdx + ydy = 0$$

Teorema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *aberto e* $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *um campo vetorial contínuo. Suponha que* $\gamma_1 : [a, b] \to \Omega$ *e* $\gamma_2 : [c, d] \to \Omega$ *duas curvas de classe* C^1 *tais que* $Im\gamma_1 = Im\gamma_2$*.*

A) Se $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ *e* $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$ *então*

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} d\gamma_2$$

B) Se $\gamma_1(a) = \gamma_2(d)$ *e* $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ *então*

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} d\gamma_1 = -\int_{\gamma_2} \vec{F} d\gamma_2$$

Exemplo

Seja $\vec{F}$ *um campo vetorial contínuo em* $\mathbb{R}^2$*. Se* $\gamma_1(t) = (t, t)$*,* $0 \leq t \leq 1$ *e* $\gamma_2(t) = (t, 2t)$*,* $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ *então*

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} \vec{F} d\gamma_2$$

solução: De fato, $Im\gamma_1 = Im\gamma_2$, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(\frac{1}{2})$.

Exemplo

Seja $\vec{F}$ um campo vetorial contínuo em $\mathbb{R}^2$. Se $\gamma_1(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$ e $\gamma_2(t) = (1 - t, 1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$ então

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} d\gamma_1 = -\int_{\gamma_2} \vec{F} d\gamma_2$$

De fato, $Im\gamma_1 = Im\gamma_2$, $\gamma_1(0) = \gamma_2(1)$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$.