

## Capítulo 8

# Controle $H_\infty$ Multivariável: Sensibilidade Mista

*Neste capítulo, formula-se o problema geral de sensibilidade mista  $H_\infty$  através do conceito de transformação linear fracionária (LFT) e o conceito de planta estendida MIMO. O problema de sensibilidade mista S/KS é então formulado e o algoritmo de síntese do controlador é apresentado. Finalmente as incertezas são incluídas no esquema e o problema S/T/KS é apresentado.*

### 8.1 Problema Geral: Planta Estendida

Antes de entrarmos nos diversos tipos de situações que vamos querer resolver com a técnica de Controle  $H_\infty$ , devemos introduzir o chamado *problema padrão*, que é a forma que os algoritmos de projeto (em particular, o Robust Control Toolbox do MATLAB) requerem que o problema esteja de forma o poder operar. Esta forma padrão é apresentada na Fig. 8.2, que é composta por três matrizes de funções de transferência:

- $P(s)$ : é a chamada planta estendida, que deve conter a planta combinada com matrizes de funções peso, cujo papel será esclarecido mais adiante;
- $K(s)$ : o controlador, que é o objeto de estudo e projeto, que deve ter parâmetros invariantes no tempo
- $\Delta(s)$ : a matrizes de funções de transferência de incertezas, conhecida como matriz das perturbações, e tal que  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ .

Os sinais apresentados neste diagrama de blocos são denominados:

- $\mathbf{w}$ : vetor dos sinais externos, que contem, dentre outros, sinais de referência, distúrbio e ruído;
- $\mathbf{z}$ : vetor os sinais conhecidos como *saídas de desempenho*, que não necessariamente contem as saídas tradicionais (medidas por sensores), mas podem contem qualquer sinal que se use para fins de projeto e análise de desempenho, como erros, sinais de controle, ou até mesmo versões filtradas destes;
- $\mathbf{v}$ : vetor de entrada do controlador, que normalmente é o vetor de erros;
- $\mathbf{u}$ : vetor de sinais de controle, que são fornecidos pelo controlador à planta de modo a efetuar o controle em tempo real;

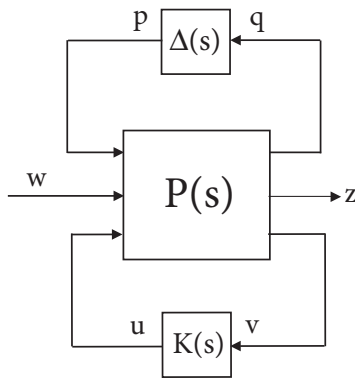


Figura 8.1: Diagrama de Blocos Geral para Controle Robusto

- $\mathbf{q}$ : é o vetor de sinais *virtuais* que são usados pela matriz de perturbações para criar as incertezas;
- $\mathbf{p}$ : é o vetor de sinais *virtuais* através dos quais a matriz de perturbações causa incertezas na planta.

É importante esclarecer que estes dois últimos sinais não existem fisicamente, mas somente durante o período de projeto do sistema, para efeito de representar as incertezas do sistema.

## 8.2 Projeto para Planta sem Incertezas

O bloco  $\Delta(s)$  nunca entra na fase de projeto do controlador  $K(s)$ . Deste modo, a matriz de funções de transferência da planta estendida pode ser particionada em:

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

e uma representação em espaço de estados tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ v &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{cases}$$

que ainda pode ser representada em um forma mais compacta, que é:

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (8.1)$$

de modo que a matriz de funções de transferência em malha fechada que relaciona  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{z}$  é dada pela fórmula:

$$\mathbf{z} = \underbrace{[P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}]}_{\mathcal{F}_l(P,K)} \mathbf{w}, \quad (8.2)$$

onde  $\mathcal{F}_l$  é conhecida como *transformação linear fracionária inferior* das matrizes  $P$  e  $K$ . Em seguida, busca-se encontrar o controlador  $K(s)$  que estabiliza internamente o sistema em malha fechada com a planta estendida  $P(s)$  e tal que satisfaz o problema de otimização:

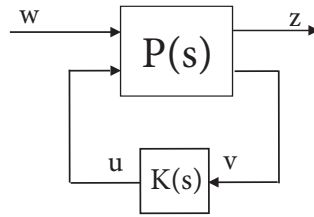


Figura 8.2: Diagrama de Blocos para Projeto de Controle Robusto

$$\min_{K(s) \text{ inter. stab.}} \|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty. \quad (8.3)$$

Se for encontrada a solução para este problema de otimização, teremos um controlador internamente estabilizante tal que o máximo ganho de energia entre os sinais de entrada (distúrbios e referências) e o erro filtrado é minimizado. As especificações estão incluídas em  $W_b$  e as incertezas na planta em  $W$ , de modo que se espera robustez.

### 8.2.1 Problema de Regulação

Para o caso de um problema de regulação, onde a referência é nula e o controlador deve somente levar o sistema ao equilíbrio, atendendo certas especificações, mesmo na presença de distúrbios, temos a planta estendida apresentada na Fig. 8.3. Como  $v = -y = -w - Gu$ , tem-se que a planta estendida é dada pela equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p w + W_p G u \\ W_u u \\ -w - G u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p & W_p G \\ 0 & W_u \\ -I & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

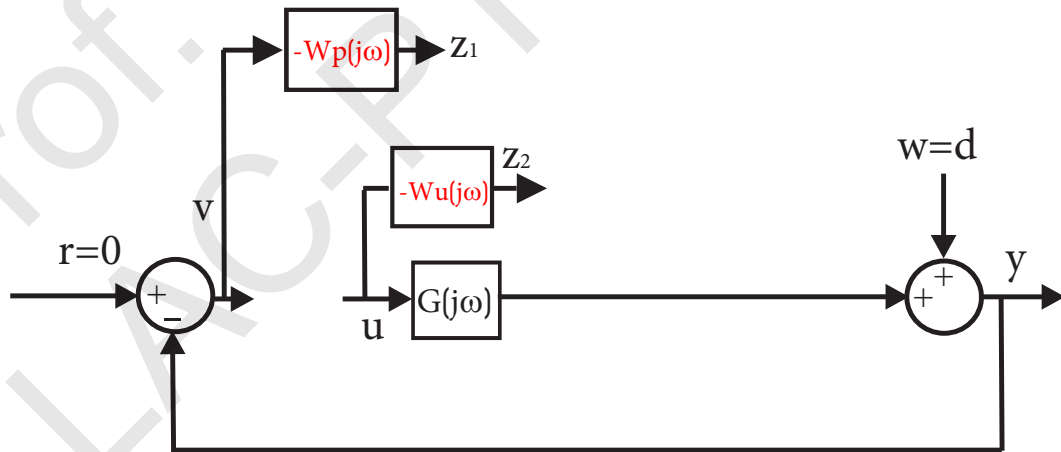


Figura 8.3: Planta estendida para problema de regulação

Deste modo, temos que:

$$\mathcal{F}_l(P, K) = \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_p G \\ -W_u \end{bmatrix} K(I + GK)^{-1} = \begin{bmatrix} W_p(I - GKS) \\ W_u KS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u KS \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Deste modo, se minimizarmos a norma  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty$  (ou como já fizemos, buscarmos uma solução sub-ótima) estaremos resolvendo o problema de sensibilidade mista  $S/KS$ .

### 8.2.2 Problema de Rastreamento

Para o caso de um problema de rastreamento, onde o distúrbio é nulo, atendendo certas especificações, temos a planta estendida apresentada na Fig. 8.4. Como  $v = r - y = r - Gu$ , tem-se que a planta estendida é dada pela equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p r - W_p G u \\ W_u u \\ r - G u \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} W_p & -W_p G \\ \hline 0 & W_u \\ I & -G \end{array} \right] \begin{bmatrix} r \\ u \end{bmatrix}$$

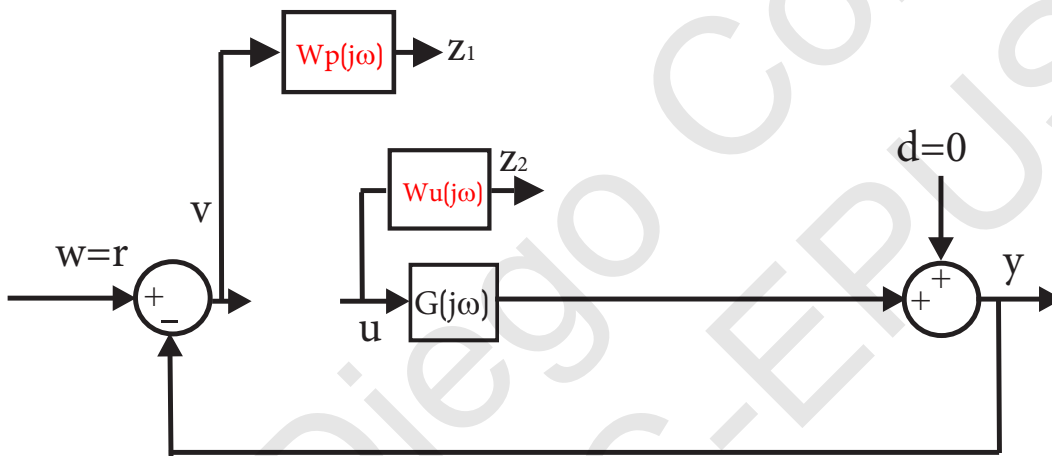


Figura 8.4: Planta estendida para problema de rastreamento

Deste modo, temos que:

$$\mathcal{F}_l(P, K) = \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -W_p G \\ W_u \end{bmatrix} K(I + GK)^{-1} = \begin{bmatrix} W_p(I - GKS) \\ W_u KS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u KS \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

o que mostra que a minimização a ser feita é igual tanto para o problema de regulação quanto para o problema de rastreamento.

### 8.3 Problema $S/T/KS$ MIMO

Se acrescentarmos uma saída de desempenho  $z_3 = W\bar{y}$ , onde  $\bar{y} = Gu$ , teremos o diagrama de blocos apresentado na Fig. 8.5.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p r - W_p G u \\ W_u u \\ W G u \\ r - G u \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} W_p & -W_p G \\ \hline 0 & W_u \\ 0 & W G \\ I & -G \end{array} \right] \begin{bmatrix} r \\ u \end{bmatrix}$$

Deste modo, temos que:

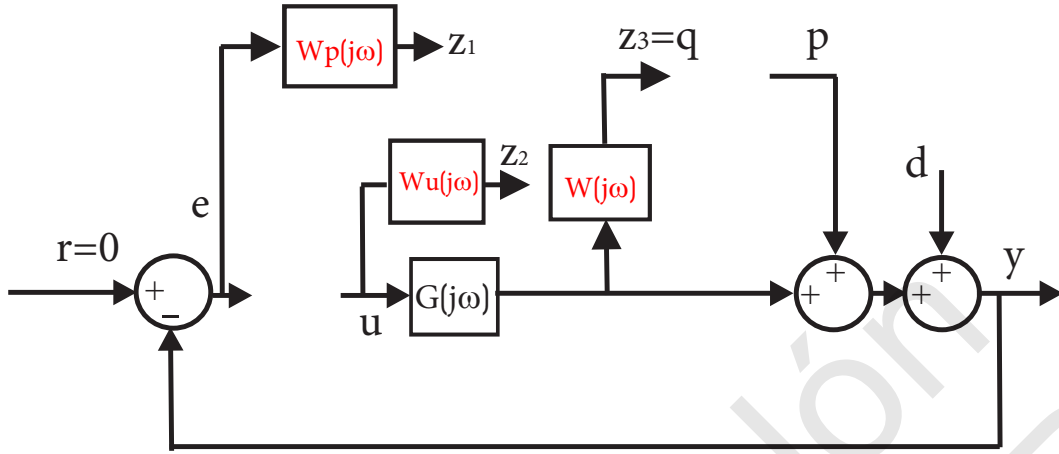


Figura 8.5: Planta estendida para problema  $S/T/KS$

$$\mathcal{F}_l(P, K) = \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -W_p G \\ W_u \\ W G \end{bmatrix} K(I + GK)^{-1} = \begin{bmatrix} W_p(I - GK S) \\ W_u K S \\ W G K S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u K S \\ W T \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

Já sabemos que o problema de otimização em Eq. (8.3) é em geral impossível de se resolver. O que se faz, entretanto, é buscar um controlador sub-ótimo. O que se faz então é buscar um controlador (ou melhor, uma família de controladores) estabilizante tal que a matriz de funções de transferência  $T_{zw} = \mathcal{F}_l(P, K)$  seja tal que:

$$\|T_{zw}\|_\infty < 1$$

Os algoritmos que buscam soluções subótimas garantem entretanto somente que:

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$$

ou seja, as especificações somente são atendidas se  $\gamma < 1$ .

**Teorema 8.3.1.** *Se  $T_{zw}$  é tal que:*

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u K S \\ W T \end{bmatrix}$$

*então se  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ , temos que:*

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(S(j\omega)) &\leq \gamma \underline{\sigma}(W_p^{-1}(j\omega)) \\ \bar{\sigma}(KS(j\omega)) &\leq \gamma \underline{\sigma}(W_u^{-1}(j\omega)) \\ \bar{\sigma}(T(j\omega)) &\leq \gamma \underline{\sigma}(W^{-1}(j\omega)) \end{aligned}$$

Há algoritmos comerciais que buscam o sub-ótimo de forma iterativa, com algum critério de parada. Eventualmente, após várias iterações,  $\gamma$  pode ficar próximo de um, ou até menor (quem sabe até chegue próximo do ótimo), o que também satisfaz as especificações. Se o melhor valor de  $\gamma$  a que se chegar for muito acima de um, há algum problema com as especificações (não podem ser atendidas) ou com a planta em si (não-controlável/observável, por exemplo). O algoritmo de Doyle, como apresentado em [ZD98]

busca encontrar um controlador na forma de realimentação de estados com observador, através da solução de duas *equações algébricas de Riccati* (ARE). Entretanto, há também a abordagem por *desigualdades matriciais lineares* (ou LMI) que é bastante popular [DP13].

## 8.4 Síntese de Controladores $H_2$ e $H_\infty$

Dado que se deseja projetar um controlador como na Fig. 8.2 e tal que  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ , inicialmente é necessário uma representação em espaço de estados como em (8.1). Esta forma padrão também pode ser usada para minimizar  $\|T_{zw}\|_2$  que, esta sim, pode ser minimizada.

Para que estes problemas possam ser resolvidos pelos algoritmos clássicos, as seguintes restrições são impostas:

1. A tripla  $(A, B_2, C_2)$  deve ser estabilizável e detectável, de modo que haja controlador estabilizante;
2.  $D_{12}$  e  $D_{21}$  devem ter posto pleno para que haja controladores realizáveis;
3. As matrizes  $\begin{bmatrix} A-j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} A-j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$  devem ter posto pleno para todo  $\omega$ , de modo a assegurar que o controlador resultante não cancel pólos com zeros no eixo imaginário;
4.  $D_{11} = 0$  e  $D_{22} = 0$ , que é uma hipótese essencial para a síntese  $H_2$ , já que isto garante que o sistema seja estritamente próprio;
5. Pode-se fazer  $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$  e  $D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$  sem perda de generalidade.

Em geral, os problemas práticos satisfazem estas restrições.

### 8.4.1 Síntese $H_2$

Supondo que o vetor de sinais  $\mathbf{w}(t)$  é um ruído branco, ou seja, tal que  $E\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t)^T\} = I\delta(t - \tau)$ , então se calcularmos:

$$E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) dt \right\} = \text{trace} (E\{\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t)^T\}) = \|T_{zw}\|_2^2$$

onde a última igualdade vem do teorema de Parseval. Deste modo, minimizar a norma  $H_2$  significa minimizar a potência da saída de desempenho. O algoritmo para solução pode ser encontrado com mais detalhes em [ZDG95].

**Exemplo:** Dado um sistema com distúrbios de processo  $w_d$  e de saída  $w_n$  que são ruídos brancos:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + w_d + B_2u \\ y &= Cx + w_n \end{cases}$$

e tal que as matrizes de covariância são:

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w_d \\ w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_d^T & w_n^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta(t - \tau)$$

e o funcional que se deseja otimizar é:

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^T Qx + u^T Ru] dt \right\}$$

onde  $Q = Q^T \geq 0$  e  $R = R^T > 0$ . Este problema é conhecido como LQG (Linear Quadratic Gaussian) e sua solução é bem conhecida, pois se trata de um problema linear quadrático.

Para colocar este problema na forma de um problema de otimização  $H_2$ , podemos definir:

$$z = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} & 0 \\ 0 & \sqrt{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} w_d \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{W} & 0 \\ 0 & \sqrt{V} \end{bmatrix} w$$

onde  $E\{ww^T\} = I\delta(t - \tau)$ . A planta estendida para este problema tem a seguinte representação em espaço de estados:

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|ccc} A & \sqrt{W} & 0 & B \\ \hline \sqrt{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{R} \\ C & 0 & \sqrt{V} & 0 \end{array} \right]$$

O controlador obtido desta forma tem a estrutura

$$K_{\text{LQG}}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A - BK_r - K_f C & K_f \\ \hline -K_r & 0 \end{array} \right]$$

onde:

- $K_r = R^{-1}B^T X$  e  $X = X^T \geq 0$  é a única solução semidefinida positiva da Equação Algébrica de Riccati:

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + Q = 0$$

- $K_f = YC^T V^{-1}$  e  $Y = Y^T \geq 0$  é a única solução semidefinida positiva da Equação Algébrica de Riccati:

$$YA^T + AY - YC^T V^{-1}CY + W = 0$$

Deste modo, a estrutura completa do sistema em malha fechada é apresentada na Fig. 8.6. Este controlador, entretanto, não é robusto.

### 8.4.2 Síntese $H_\infty$

No problema de síntese  $H_\infty$  o que se busca é um controlador  $K(s)$  tal que:

$$\|T_{wz}\|_\infty = \|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$$

e isto se dá através de um algoritmo iterativo. Há um teorema que dá as condições necessárias para que exista um controlador tal que tal que  $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$  tenha solução. Se  $\gamma_0$  é o ínfimo do conjunto de valores de  $\gamma$  para os quais existe controlador admissível, é possível se aproximar de  $\gamma_0$  por uma técnica de busca, podendo até ser possível resolver o problema de Controle Ótimo  $H_\infty$ .

De fato, temos que  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$  se e só se:

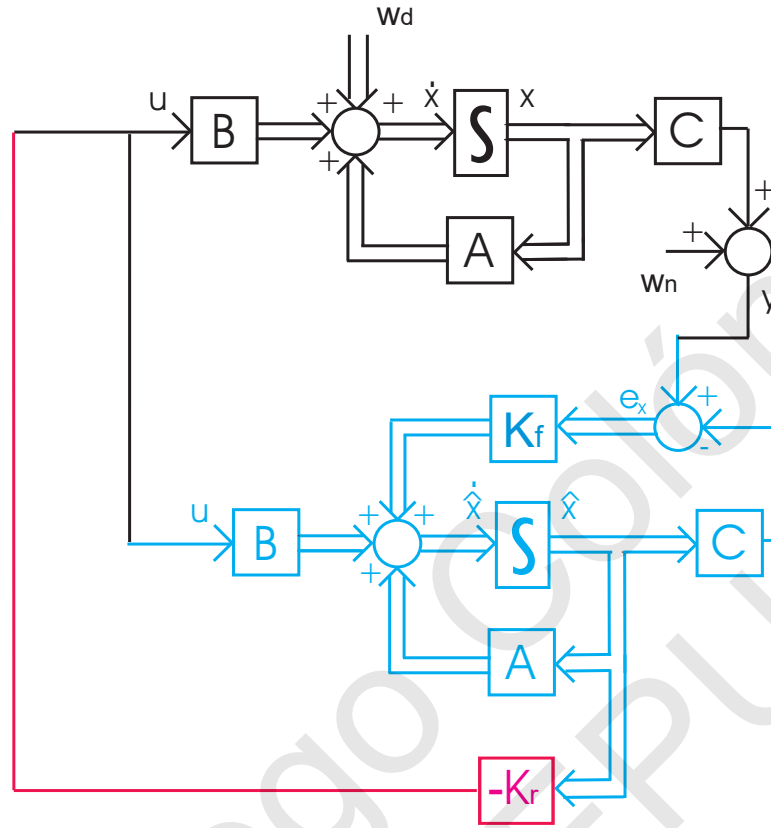


Figura 8.6: Sistema LQG com Filtro de Kalman

1. Existe  $X_\infty \geq 0$  que seja solução da EAR:

$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty = 0$$

tal que  $\Re \lambda_i [A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty] < 0$  para qualquer  $i$ , e:

2. Existe  $Y_\infty \geq 0$  que seja solução da EAR:

$$A^T Y_\infty + Y_\infty A + B_1^T B_1 + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty = 0$$

tal que  $\Re \lambda_i [A + (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty] < 0$  para qualquer  $i$ , e

3.  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

De fato, há uma família de controladores estabilizantes  $K(s) = \mathcal{F}_l(K_C, Q)$  onde

$$K_C(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$

e onde  $F_\infty = -B_2^T X_\infty$ ,  $L_\infty = -Y_\infty C_2^T$ ,  $Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$  e  $A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$  e  $Q(s)$  é qualquer matriz de funções de transferência estável e própria tal que  $\|Q\|_\infty < \gamma$ . O dito *controlador central* é aquele membro da família para o qual  $Q(s) \equiv 0$  e que tem a expressão:

$$K(s) = -F_\infty (sI - A_\infty)^{-1} Z_\infty L_\infty$$

Além disso:



- O controlador central possui tem o mesmo número de estados que a planta generalizada  $P(s)$ .
- O controlador central possui também um estrutura de separação na forma de um *observador* de estados e uma realimentação dos estados estimados pelo observador da forma:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + \underbrace{B_1\gamma^{-2}B_1^T X_\infty}_{\hat{w}_{\text{pior}}}\hat{x} + B_2u + Z_\infty L_\infty(C_2\hat{x} - y) \\ u &= F\hat{x}\end{aligned}\tag{8.7}$$

**Exemplo:** Para o caso do sistema linear MIMO de controle de vazão e temperatura de ar apresentado na seção 7.2, já vimos que um simples controlador proporcional  $K(s) = kI$  não pode sequer diminuir um pouco o erro estacionário sem levar o sistema à instabilidade em malha fechada rapidamente.

Entretanto, se usarmos a técnica de sensibilidade mista  $S/KS$ , a tarefa de projetar um controlador se torna mais sistemática. Para tanto, temos que especificar uma função peso de desempenho  $W_p(s)$  e uma função peso de controle  $W_u(s)$ . Vamos assumir que a função  $W_p(s)$  é da forma já conhecida:

$$W_p(s) = \frac{\frac{s}{M} + \omega_b^*}{s + A\omega_B^*}$$

e vamos escolher uma constante de erro estacionário igual a  $A = 0.02$ , uma banda-passante  $\omega_B^* = 4.0\text{rad/s}$  e um valor máximo que  $\|S\|_\infty$  pode ter igual a 3.0.

Para se atender tais especificações, é necessário escolher um peso não muito alto de controle  $W_u(s)$ . De fato, neste primeiro projeto, escolheu-se  $W_u \equiv 0.005$ . Na Fig. 8.7 tem-se o diagrama de Bode do inverso da função peso de desempenho (em vermelho) para as especificações desejadas. Na Fig. 8.8 tem-se verde os valores singulares da matriz de funções de transferência da planta e em azul os valores singulares da matriz de funções de transferência em malha aberta, ou seja,  $L(s) = G(s)K(s)$ , com o controlador projetado. O valor de  $\gamma$  obtido para este projeto foi  $\gamma = 1.0796$ , o que significa que as especificações foram atendidas com boa exatidão.

O controlador foi obtido utilizando-se a função do MATLAB `[K,CL,GAM,INFO] = hinfsyn(P)` que aceita como entrada a planta generalizada  $P$ , que já contém as funções peso. Para se gerar esta planta, foi utilizada a função do MATLAB `P = augw(G,W1*eye(2),W2*eye(2),W3*eye(2))` onde as funções peso  $W_1$  e  $W_2$  são respectivamente  $W_p$  e  $W_u$  e  $W_3$  foi considerada nula, uma vez que estamos resolvendo um problema  $S/KS$ .

O controlador obtido é uma matriz de funções de transferência dois por dois e de ordem onze, de modo que sua expressão é muito complexa e não será apresentada aqui. Seus valores singulares são entretanto apresentados na Fig. 8.9. É interessante notar que este controlador aumenta o ganho de  $L$  nas baixas frequências, de modo a se atender as especificações de erro estacionário, e aumenta ligeiramente a banda-passante. Na Fig. 8.7 tem-se também os valores singulares da matriz  $S(s)$ , que fica praticamente baixo da função peso. A banda-passante real ficou  $\omega_B = 2.86\text{rad/s}$ . Os valores singulares de  $T$  e de  $L$  são plotados juntos na Fig. 8.10 para efeito de comparação. Nota-se claramente que os valores singulares de  $T$  tendem aos valores singulares de  $L$  nas altas frequências.

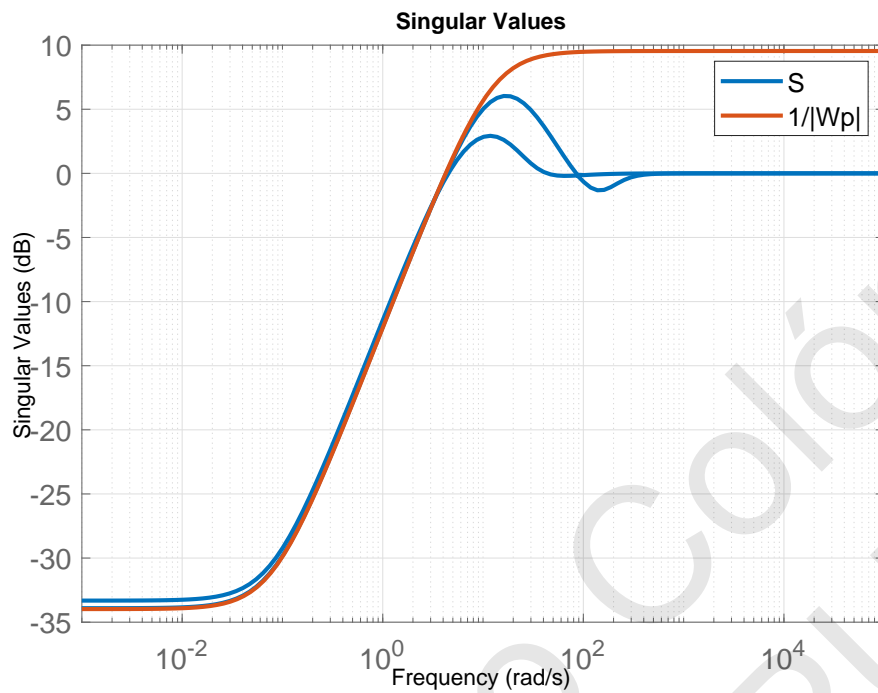


Figura 8.7: Função Sensibilidade e Peso de Desempenho

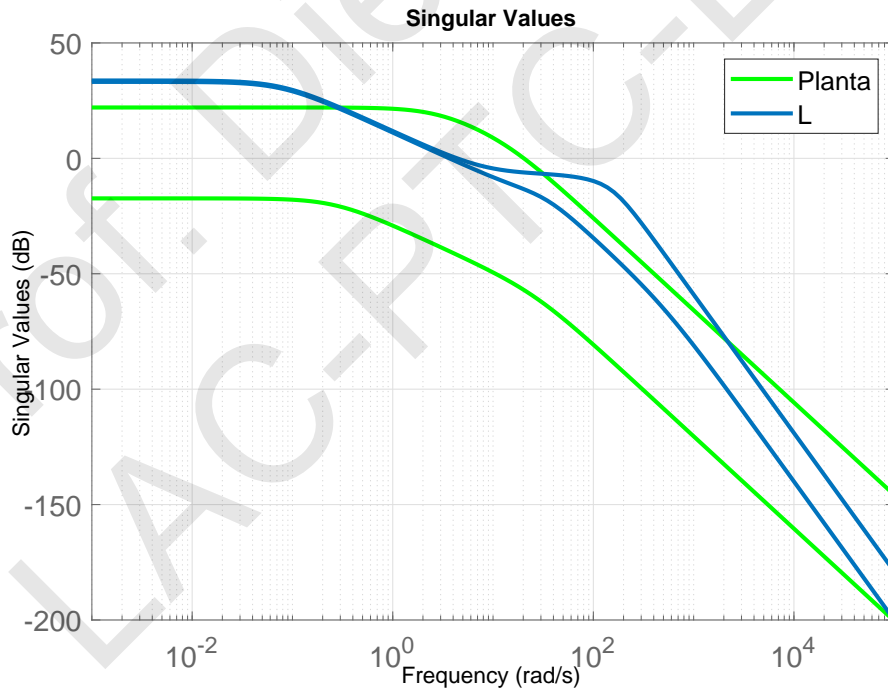


Figura 8.8: Função Sensibilidade e Peso de Desempenho

A resposta ao degrau para  $T$  é apresentada na Fig. 8.11. Nota-se que o tempo de acomodação ficou em torno de 1.0 segundo, o que é bem menor que os tempos de

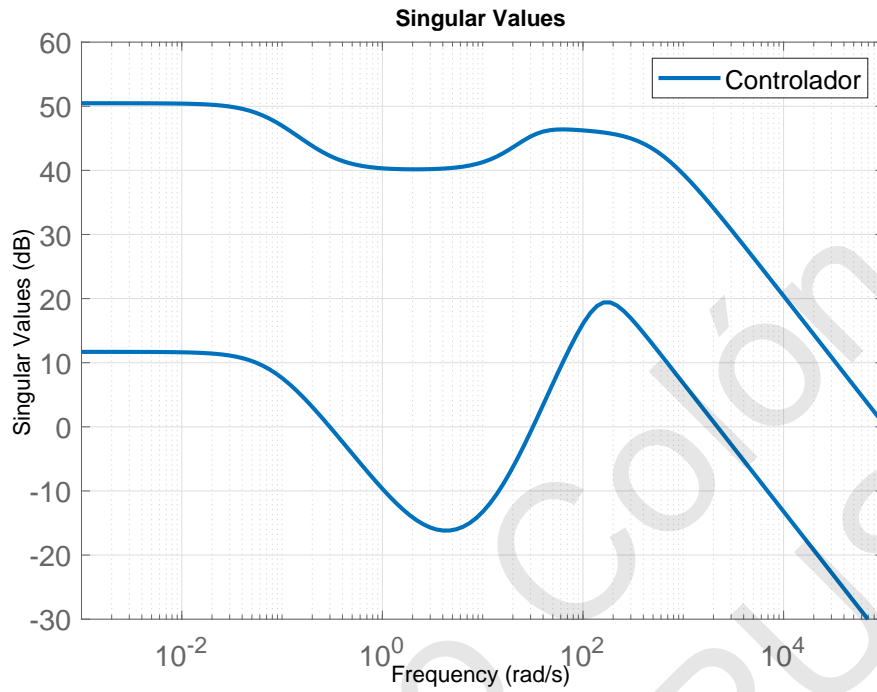


Figura 8.9: Valores Singulares do Controlador

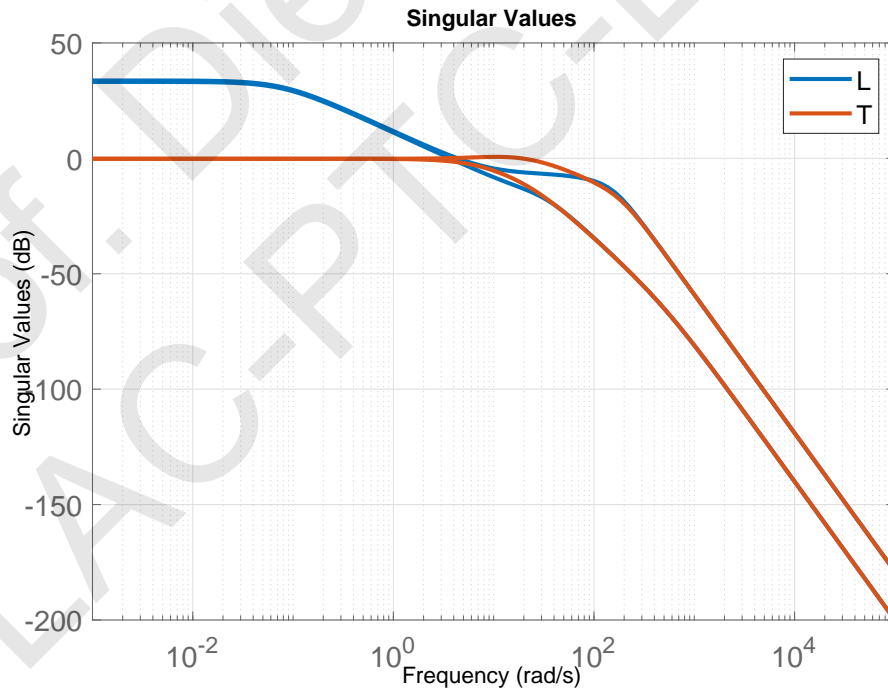


Figura 8.10: Valores Singulares do Controlador

acomodação para o caso da planta, cujo menor era em torno de 4.0 segundos e o maior em torno de 25.0 segundos. Nota-se também que o erro estacionário ficou bem

pequeno (em torno de 2%). Também se vê que os canais estão desacoplados, ou seja, aplicar uma referência na entrada  $i$  somente vai afetar a saída  $i$ , e não vai afetar a outra saída. Na Fig. 8.12 temos os valores singulares da função de malha fechada  $KS$ , que relaciona sinais de entrada com sinal de controle. Nota-se que o ganho de energia é alto nas baixas frequências e cai rapidamente nas altas.

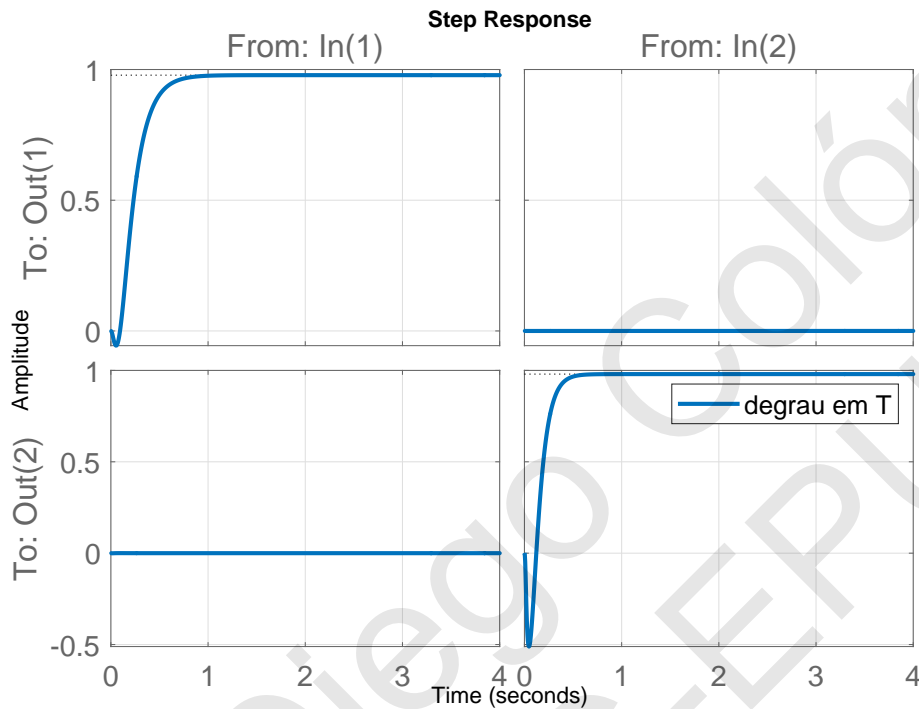


Figura 8.11: Resposta ao Degrau Unitário de Referência

O sinal de controle para as respostas ao degrau apresentados na Fig. 8.11 são apresentados na Fig. 8.13. É interessante notar que os valores do sinal são muito acima (por volta de 30 vezes) maiores que o valor de saturação. Isto se deve ao fato de estarmos tentando impor uma dinâmica muito mais rápida do que a que o sistema pode suportar. Certamente, este projeto precisa ser refeito. Para mostrar a capacidade de rejeição de perturbações deste sistema, é apresentada a resposta ao degrau de distúrbio na Fig. 8.14. Nota-se que o erro final de distúrbio também é por volta de 2% e o tempo para ir para acomodar no valor final é da ordem de 1.0 segundo, o que é semelhante aos parâmetros para o degrau de referência.

## 8.5 Controladores $H_2$ e $H_\infty$ com Integradores

Em geral, segundo [ZDG95], a técnica de sensibilidade mista não produz controladores com integradores. Neste mesmo livro, mostram-se algumas técnicas para reformulação dos pesos de forma a fazer aparecer integradores em  $K(s)$ . Entretanto, estas técnicas não são tão imediatas. Veremos que o método  $H_\infty$  Loop Shaping é mais direto para inserção de integradores.

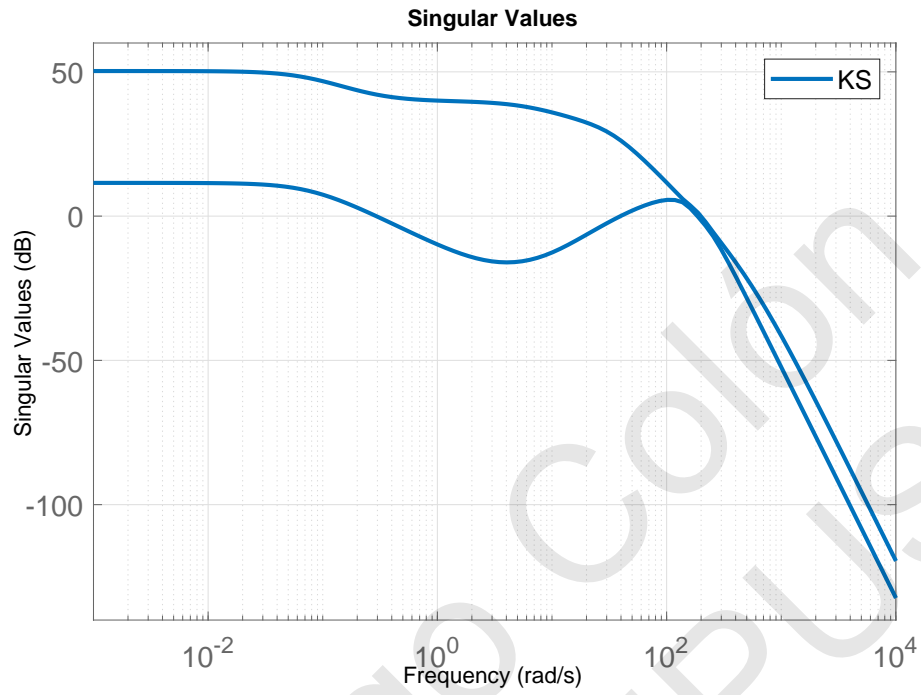


Figura 8.12: Valores Singulares de *KS*

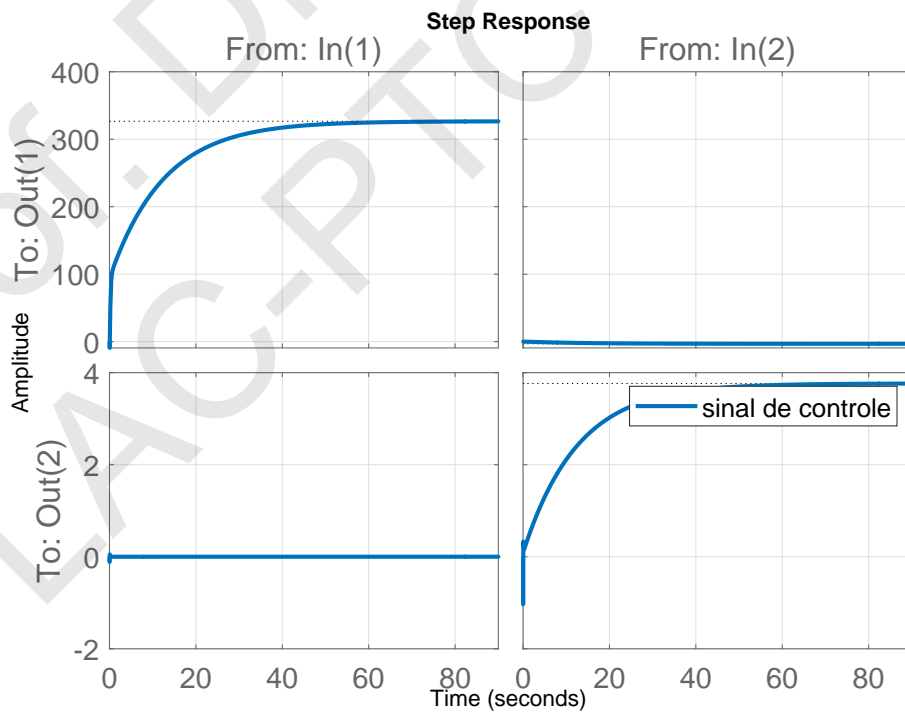


Figura 8.13: Sinal de Controle para Resposta ao Degrau Unitário

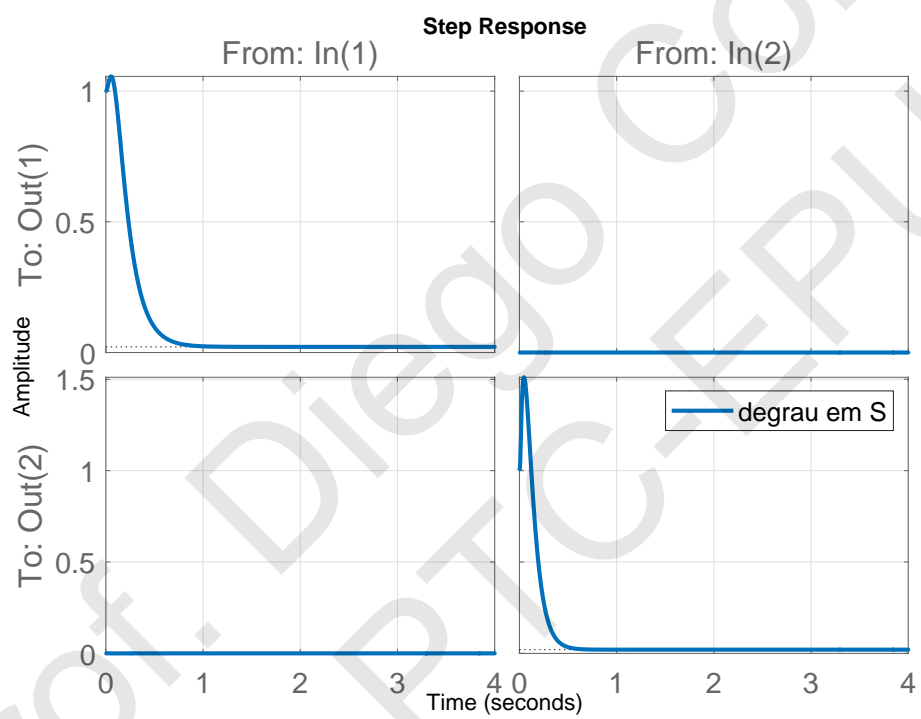


Figura 8.14: Resposta ao Distúrbio de Degrau Unitário

# Referências Bibliográficas

- [dC96] José Jaime da Cruz. *Controle Robusto Multivariável*. Editora da Universidade de São Paulo, 1996.
- [DLCBS18] P.B. De Lauro Castrucci, A. Bittar, and R.M. Sales. *Controle Automático*. LTC, 2018.
- [DP13] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Fer02] Pedro J. Fernandez. *Medida e Integração*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Estrada Dona Castorina, 110, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [FPC20] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. On the  $\mu$ -analysis and synthesis of mimo lurie-type systems with application in complex networks. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, June 2020.
- [GPK14] D.W. Gu, P.H. Petkov, and M.M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB®*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2014.
- [Hes18] J.P. Hespanha. *Linear Systems Theory: Second Edition*. Princeton University Press, 2018.
- [Lju99] Lennart Ljung. *System Identification - Theory For the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., second edition, 1999.
- [Nis15] N.S. Nise. *Control Systems Engineering, 7th Edition*. Wiley, 2015.
- [Oga11] K. Ogata. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011.
- [PC19] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. An application of the lurie problem in hopfield neural networks. In Agenor de T. Fleury, Domingos A. Rade, and Paulo R. G. Kurka, editors, *Proceedings of DINAME 2017*, pages 371–382, Cham, 2019. Springer International Publishing.
- [SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Wiley, 2005.
- [SPS98] R.S. Sánchez-Peña and M. Sznaiier. *Robust systems theory and applications*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. John Wiley, 1998.
- [ZD98] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Modular Series for Eng. Prentice Hall, 1998.
- [ZDG95] Khemin Zhou, John C. Doyle, and Keith Glover. *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1995.