SME 141
Assunto: Equações Diferenciais
Aula EDO-2 – EDOs de 1ª ordem

Prof. Miguel Frasson

Novembro de 2020

EDOs separáveis

- As EDOs separáveis são EDOs de 1ª ordem em que as que "separar" as variáveis na forma

$$g(y)y' = h(t),$$

  onde, no primeiro membro, aparece y' multiplicado por uma função que depende apenas de y
- Essas EDOs são fáceis de se resolver.
  Veremos que a dificuldade são as integrais que podem aparecer, mas isso não tem a ver com o método de resolução, que é simples.

Exemplos

1. Todas as EDOs onde t não aparece explicitamente são separáveis. Essas EDOs chamam-se autônomas.
   $\rightarrow$ Basta passar dividindo os termos com y:
   - Vel. reação química: $y' = k(a-y)(b-y)$

   $$\frac{y'}{(a-y)(b-y)} = k, \qquad g(y) = \frac{1}{(a-y)(b-y)}, \quad h(t) = k.$$

   - Lei de Malthus: $y' = ky$

   $$\frac{y'}{y} = k, \qquad g(y) = \frac{1}{y}, \quad h(t) = k.$$

   - Lei de Verhulst: $y' = ay - by^2$

   $$\frac{y'}{y(a-by)} = 1, \qquad g(y) = \frac{1}{y(a-by)}, \quad h(t) = 1.$$

Exemplos

2. Todas as EDOs lineares de 1ª ordem **homogêneas** são separáveis:

$$y' + a(t)y = 0 \implies \frac{y'}{y} = -a(t)$$

3. Todas as EDOs lineares de 1ª ordem **não homogêneas** (não autônomas) NÃO são separáveis:

   $y' + a(t)y = b(t) \quad \rightarrow$ não dá para separar em $g(y)y' = h(t)$

4. Dúvida: mas $x' + x = t$ não está separada, já que todo x está no 1º membro?
   Resposta: Não basta estar todo x no 1º membro, tem que ser x' **multiplicando** uma expressão só com x.

Resolvendo uma EDO separável

Dedução do método

- $g(y)y' = h(t)$
- Lembre que y depende de t

$$g(y(t))y'(t) = h(t)$$

- Integre por partes em t ($u = y(t)$, $du = y'(t)dt$)

$$\int g(\underbrace{y(t)}_{u})\underbrace{y'(t)dt}_{du} = \int h(t)dt$$

$$\int g(u)du = \int h(t)dt$$

$G(u) = \int g(u)du$, $H(t) = \int h(t)dt$, desfazendo a mudança

$$G(y(t)) = H(t) + C$$

Resolvendo uma EDO separável

Dedução do método

- $G(y) = H(t) + C$
  define y em função de t **implicitamente** para cada valor do parâmetro C

- **Condições iniciais** determinam valores para C:
  se impomos $y(t_0) = y_0$, substituindo:

$$G(y_0) = H(t_0) + C \implies C = G(y_0) - H(t_0)$$

- (OPCIONAL) Se for possível inverter a função G, isto é, "isolar y", podemos encontrar uma expressão para $y(t)$

Resolvendo uma EDO separável

Resumo do método

- Partindo da EDO separável

$$g(y)y' = h(t)$$

- Integre em y no 1º membro (y' torna-se dy) e em t no 2º membro

$$\int g(y)dy = \int h(t)dt$$

- Solução implícita: $G(y) = H(t) + C$

Exemplo 1 – com integral indefinida

- Vamos resolver o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$y' = 6t^5 e^{-y}, \qquad y(1) = \ln 2$$

- Escrevemos na forma separável e resolvemos

$$e^y y' = 6t^5$$
$$\int e^y\, dy = \int 6t^5\, dt$$
$$e^y = t^6 + C \quad \leftarrow \text{ solução implícita}$$

- Usando a condição inicial: $t = 1 \implies y = \ln 2$

$$e^{\ln 2} = 1^6 + C \implies 2 = 1 + C \implies C = 1.$$

- Solução: $e^y = t^6 + 1$
- Opcional: $y = ln(t^6 + 1)$

Exemplo 1 – com integral definida

- Vamos resolver o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$y' = 6t^5 e^{-y}, \qquad y(1) = \ln 2$$

- Escrevemos na forma separável e resolvemos

$$
\begin{aligned}
e^y y' &= 6t^5 \\
\int e^y \, dy &= \int 6t^5 \, dt \\
\int_{\ln 2}^{y} e^s \, ds &= \int_1^t 6s^5 \, ds \\
e^y - e^{\ln 2} &= t^6 - 1^6 \quad \leftarrow \text{ solução implícita}
\end{aligned}
$$

- Solução: $e^y = t^6 + 1$
- Opcional: $y = ln(t^6 + 1)$

Exemplo 2

- Vamos resolver o modelo de Verhulst

$$y' = y - ay^2$$

- Escrevemos na forma separável e resolvemos

$$\frac{y'}{y(1-ay)} = 1$$

$$\int \frac{1}{y(1-ay)} dy = \int 1 dt = t + C$$

Exemplo 2

$$\int \frac{1}{y(1-ay)} dy = t + C$$

- A integral é por frações parciais

$$\frac{1}{y(1-ay)} = \frac{1}{y} + \frac{-a}{ay-1}$$

$$\int \frac{1}{y(1-ay)} dy = \ln y - \ln(ay-1) + C_1$$

- Solução:

$$\ln y - \ln(ay-1) = t + C$$

Exemplo 2

- Solução:

$$\ln y - \ln(ay - 1) = t + C$$

- Opcional: isolar y

$$\begin{aligned}
t + C = \ln \frac{y}{ay-1} &= \ln \frac{(y - \frac{1}{a}) + \frac{1}{a}}{ay - 1} = \ln \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{1}{ay-1}\Big) \\
e^{t+C} &= \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{1}{ay-1}\Big) \\
ae^{t+C} &= 1 + \frac{1}{ay-1} \\
\frac{1}{ay-1} &= ae^{t+C} - 1 \\
ay - 1 &= (ae^{t+C} - 1)^{-1} \\
y &= \frac{1 + (ae^{t+C} - 1)^{-}1}{a}
\end{aligned}$$

Exemplo 3: $y' + y = 1, \quad y(0) = a$

- Considere o PVI da aula passada: $y' + y = 1, \quad y(0) = a$
- Pode ser reescrito como separável (note que se assume $y \neq 1$):

$$y' + y = 1 \implies y' = 1 - y \implies \frac{y'}{y-1} = -1$$

- Resolvendo com integral imprópria:

$$\int \frac{dy}{y-1} = -\int 1dt \implies \ln|y-1| = -t + C$$

- Usando as condições iniciais: $t = 0, y = a$

$$\ln|a-1| = -0 + C \implies C = \ln|a-1|$$

- Solução implícita ($y \neq 1$): $\ln|y-1| = -t + \ln|a-1|$

Exemplo 3: $y' + y = 1, \quad y(0) = a$

Opcional: buscando solução explícita

- Solução implícita ($y \neq 1$): $\ln|y-1| = -t + \ln|a-1|$.
- Como $y(0) = a \implies y(0) - 1 = a - 1$ e vê-se que y é sempre diferente de 1, o sinal de $y - 1$ é o mesmo de $a - 1$.
- Se $a < 1$, $|y-1| = 1 - y$

$$\ln(1-y) = \ln(1-a) - t \implies 1 - y = e^{\ln(1-a)-t} = (1-a)e^{-t}$$
$$\implies y = 1 + (a-1)e^{-t}$$

- Se $a > 1$, $|y-1| = y - 1$

$$\ln(y-1) = \ln(a-1) - t \implies y - 1 = e^{ln(a-1)-t} = (a-1)e^{-t}$$
$$\implies y = 1 + (a-1)e^{-t}$$

- Portanto, se $a \neq 1$, $y = 1 + (a-1)e^{-t}$
- Note que essa fórmula vale até mesmo se $a = 1$, portanto essa é a solução geral.
- A EDO desse exemplo é linear de 1ª ordem, e será mais fácil resolvê-la com o método específico para esse tipo de EDO.

Exemplo 4: Diluição de misturas (aula anterior)

Diluição de misturas

Um tanque contém 5.000 litros de água na qual estão diluídos 50 Kg de sal. A essa mistura adiciona-se salmoura à razão de 10 l/min com uma concentração de sal de 20 g/l. A concentração da mistura é mantida homogênea por meio de um agitador. A mistura (homogênea) deixa o tanque à razão de 10 l/min. Determine a quantidade de sal em função do tempo.

Modelando...

$$q' + \frac{1}{500} q = 200, \quad q(0) = 50000$$

Diluição de misturas

- PVI: $\quad q' + \frac{1}{500}q = 200, \quad q(0) = 50000$
- Ele já pode ser resolvido como EDO separável

$$
\begin{aligned}
q' + \frac{1}{500}q = 200 \implies q' &= 200 - \frac{1}{500}q = \frac{100\,000 - q}{500} \\
\implies \frac{q'}{q - 10^6} &= -500 \\
&\text{(obs: } |q - 10^6| = 10^6 - q)
\end{aligned}
$$

- ... mas a resolveremos com o método específico para EDOs lineares de 1ª ordem, que estudaremos a seguir.

EDOs lineares de 1ª ordem

- $a, b : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas
- EDO linear de 1ª ordem:

$$y' + a(t)y = b(t)$$

- É uma classe muito importante de EDOs, usada em diversas aplicações.

Ideia: 1º membro torna-se derivada do produto

Ideia

- Derivada do produto: $(y\mu)' = \mu y' + \mu' y$
- EDO: $y' + a(t)y = b(t)$
- Multiplique por uma função μ:

$$\mu y' + \underbrace{a\mu}_{\mu'?} y = \mu b$$

- Se $\mu' = a(t)\mu$, então ficamos com

$$(\mu y)' = \mu b \implies \mu y = \int \mu b dt$$

Ideia: 1º membro torna-se derivada do produto

Ideia

- Para achar μ tal que $\mu' = a\mu$:

$$\begin{aligned} \frac{\mu'}{\mu} = a(t) &\implies \int \frac{d\mu}{\mu} = \int a(t)dt \\ &\implies \ln \mu = A(t) + \underbrace{C}_{\text{tome } C=0} \\ &\implies \mu = e^{A(t)} \end{aligned}$$

- Essa função $\mu = e^{A(t)}$ chama-se fator integrante

Resumo do método

- $y' + ay = b$
- fator integrante: $A(t)$ primitiva de $a(t)$ e $\mu = e^{A(t)}$
- Multiplique a EDO por μ

$$\mu y' + \overbrace{a\mu}^{=\mu'} y = \mu b$$

$$(\mu y)' = \mu b$$

$$\mu y = \int \mu(t) b(t) dt + C$$

- Solução

$$y = \mu^{-1} \int \mu(t) b(t) dt + C\mu^{-1}$$

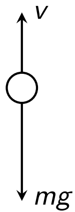
Exemplo 4: Diluição de misturas

$$q' + \frac{1}{500}q = 200, \quad q(0) = 50000$$

- $a = \frac{1}{500}$ (constante) $\implies A = at \implies \mu = e^{at}$
- $$\begin{aligned} e^{at}q' + ae^{at}q = 200e^{at} &\implies (e^{at}q)' = 200e^{at} \\ &\implies e^{at}q = 200\int e^{at}dt = \frac{200}{a}e^{at} + C \\ &\implies q = \frac{200}{a} + Ce^{-at} = 100000 + Ce^{-at} \end{aligned}$$
- Usando a condição inicial $q(0) = 50000$:
$$50000 = 100000 + C \implies C = -50000$$
- Solução: $q(t) = 100000 - 50000e^{-t/500}$

Exemplo 5: queda livre modelada pela velocidade

Um corpo com massa $m = 1\text{kg}$ está em queda livre vertical na atmosfera, e sofre uma força de resistência do ar de intensidade igual ao módulo de sua velocidade. No instante $t = 0$ o corpo parte do repouso. Assuma aceleração da gravidade g. Determine a expressão da velocidade em função do tempo.



Modelando com a 2ª lei de Newton...

$$v' = g - v, \quad v(0) = 0.$$

Exemplo 6: queda livre

$$v' + v = g, \quad v(0) = 0$$

- $a = 1, \quad A = t, \quad \mu = e^t$
- $v' + v = g \implies e^t v' + e^t v = ge^t \implies (e^t v)' = ge^t$

$$\implies e^t v = \int ge^t dt = ge^t + C \implies v = g + Ce^{-t}$$

- Usando a condição inicial:

$$v(0) = 0 \implies 0 = g + C \implies C = -g.$$

- Solução:

$$v(t) = g(1 - e^{-t})$$

Exemplo 6: $ty' + 2y = t^3$

- O termo com y' não é 1 !! (divida a equação por t)

$$y' + \frac{2}{t}y = t^2$$

- $a = \frac{2}{t}, \quad A = \int \frac{2}{t} dt = 2\ln t = \ln t^2$
- $\mu = e^A = e^{\ln t^2} = t^2$
- Multiplique a EDO por $\mu = t^2$

$$\begin{aligned} t^2 y' + 2ty = t^4 &\implies (t^2 y)' = t^4 \\ &\implies t^2 y = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C \\ &\implies y = \frac{t^3}{5} + \frac{C}{t^2} \end{aligned}$$