ANOVA
Modelos de Efeitos Fixos e Aleatórios

Modelos mais Gerais

(Neter et al. 2005; Oehlert, 2010)

Diferentes estruturas para os componente "FIXOS" e "ALEATÓRIOS" do modelo adotado para Y:

$$\mathbf{Y = \boxed{E[Y|X]} + \boxed{[\,Y - E(Y|X)]}}$$

componente fixo do modelo

componente aleatório do modelo

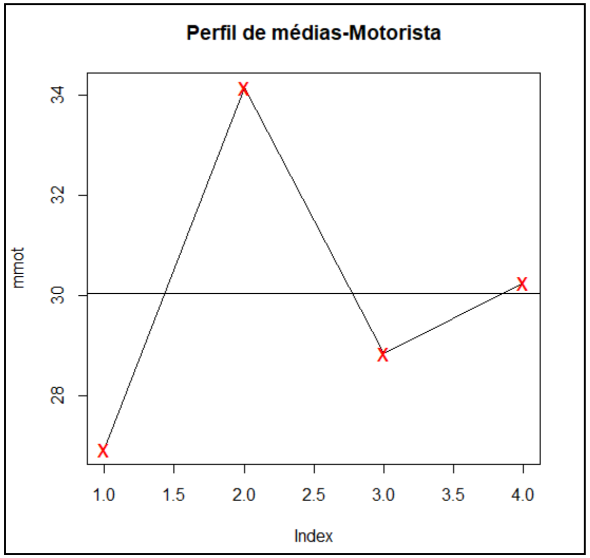
Modelo com Dois Fatores Aleatórios

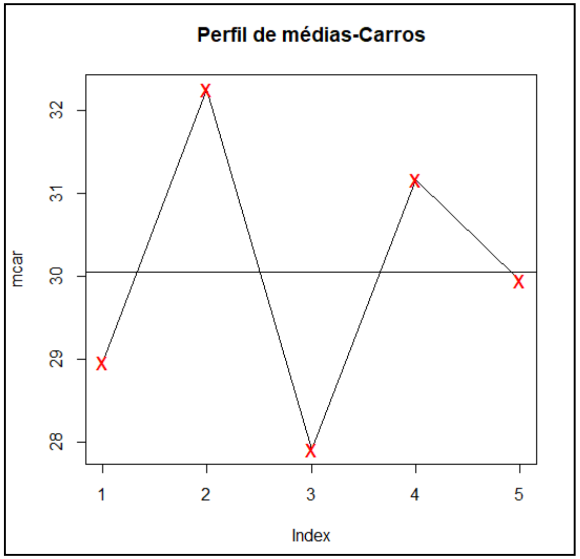
Consumo de Gasolina de acordo com carros e motoristas amostrados aleatoriamente de uma indústria automobilística

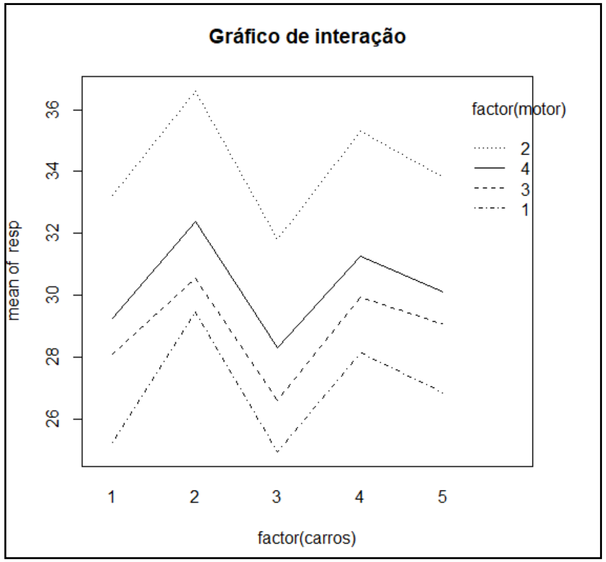
Fator B: Motoristas	Fator A: Carros				
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
$i = 1$	25.3 25.2	28.9 30.0	24.8 25.1	28.4 27.9	27.1 26.6
$i = 2$	33.6 32.9	36.7 36.5	31.7 31.9	35.6 35.0	33.7 33.9
$i = 3$	27.7 28.5	30.7 30.4	26.9 26.3	29.7 30.2	29.2 28.9
$i = 4$	29.2 29.3	32.4 32.4	27.7 28.9	31.8 30.7	30.3 29.9

Os fatores Carros e Motoristas são aleatórios.
A resposta sob estudo é o consumo de combustível.

Modelo com Dois Fatores Aleatórios







Componentes da variabilidade de Y devido ao efeito (aleatório) principal de cada fator bem como de sua interação.

Modelo com Dois Fatores Aleatórios

Componente fixo

Componente aleatório

$$y_{ijk} = \mu_{jk} + e_{ijk} = \boxed{\mu} + \boxed{\tau_j + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}}; \quad i = 1,\dots,n_{jk};\ j = 1,\dots,a;\ k = 1,\dots,b$$

$$\tau_j \sim N\left(0;\sigma_A^2\right); \quad \beta_k \sim N\left(0;\sigma_B^2\right); \quad \gamma_{jk} \sim N\left(0;\sigma_{AB}^2\right);$$

$$e_{ijk} \sim N\left(0;\sigma_e^2\right); \quad \tau_j \perp \beta_k \perp \gamma_{jk} \perp e_{ijk}$$

$$y_{ijk} \sim N\left(\mu;\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$Cov\left(y_{ijk};y_{i'j'k'}\right) = \begin{cases} \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2 & i = i';\ j = j';\ k = k' \\ \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 & i \neq i';\ j = j';\ k = k' \\ \sigma_A^2 & i \neq i';\ j = j';\ k \neq k' \\ \sigma_B^2 & i \neq i';\ j \neq j';\ k = k' \\ 0 & i \neq i';\ j \neq j';\ k \neq k' \end{cases}$$

Modelos Lineares de Efeitos Aleatórios

ANOVA para Delineamentos com Dois Fatores, A e B, Aleatórios

FV	#g.l.	E(QM)
A	a-1	$\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2 + rb\sigma_A^2$
B	b-1	$\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2 + ra\sigma_B^2$
AB	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2$
Resíduo	n-ab=ab$(r-1)$	σ_e^2

r: réplicas n=abr

Neter et al., 2005

Estrutura Fatorial dos efeitos aleatórios

$$H_0 : \sigma_{AB}^2 = 0 \Rightarrow F_{AB} = \frac{QM(AB)}{QM\,\mathrm{Re}s} \sim F_{(a-1)(b-1),ab(r-1)}$$

$$H_0 : \sigma_A^2 = 0 \Rightarrow F_A = \frac{QMA}{QM(AB)} \sim F_{(a-1),(a-1)(b-1)}$$

$$H_0 : \sigma_B^2 = 0 \Rightarrow F_B = \frac{QMB}{QM(AB)} \sim F_{(b-1),(a-1)(b-1)}$$

Tabela de ANOVA equivalente ao modelo de efeitos Fixos, exceto o E(QM).
Não há uma ordem para a realização dos testes dos components de variância!

Modelo com Dois Fatores Aleatórios
Estimadores dos Componentes de Variância

$$\sigma_A^2 = \frac{E(QMA) - E(QMAB)}{rb} \Rightarrow \hat{\sigma}_A^2 = \frac{QMA - QMAB}{rb}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{E(QMB) - E(QMAB)}{ra} \Rightarrow \hat{\sigma}_B^2 = \frac{QMB - QMAB}{ra}$$

$$\sigma_{AB}^2 = \frac{E(QM\,\mathrm{Re}\,s) - E(QM\,\mathrm{Re}\,s)}{r} \Rightarrow \hat{\sigma}_{AB}^2 = \frac{QMAB - QM\,\mathrm{Re}\,s}{r}$$

$$\sigma_e^2 = E(QM\,\mathrm{Re}\,s) \Rightarrow \hat{\sigma}_e^2 = QM\,\mathrm{Re}\,s$$

Intervalos de Confiança aproximados para Componentes de Variância em modelos balanceados podem ser obtidos por meio do procedimento de Satterthwaite que identifica os estimadores desses CV como combinações lineares de Quadrados Médios.

Modelo com 2 Fatores Aleatórios
Estimador da Média Geral

$$\hat{\mu} = \overline{y}_{...}$$

$$Var(\hat{\mu}) = Var\left(\frac{\sum_{ijk} y_{ijk}}{rab}\right) = \frac{rb\sigma_A^2 + ra\sigma_B^2 + r\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2}{rab}$$

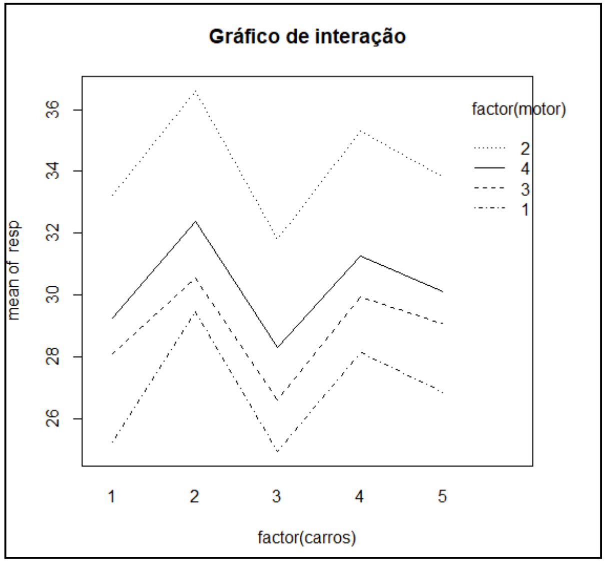
$$= \frac{E(QMA) + E(QMB) - E(QMAB)}{rab}$$

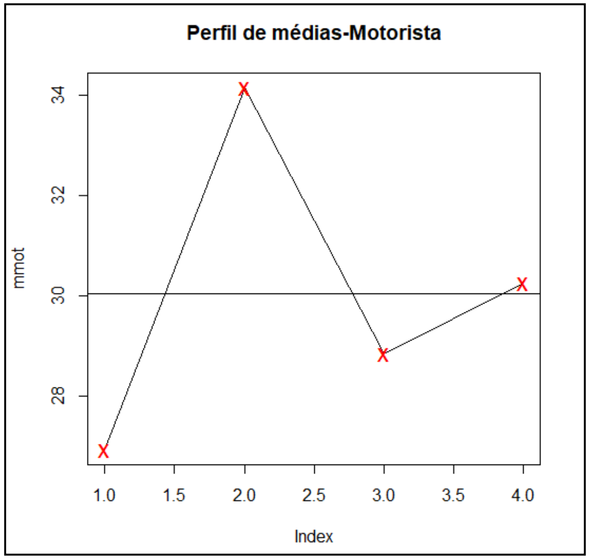
$$\hat{V}ar(\hat{\mu}) == \frac{QMA + QMB - QMAB}{rab}$$

Modelo com Dois Fatores Aleatórios

Fator B: Motoristas	Fator A: Carros				
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$i=1$	25.3 25.2	28.9 30.0	24.8 25.1	28.4 27.9	27.1 26.6
$i=2$	33.6 32.9	36.7 36.5	31.7 31.9	35.6 35.0	33.7 33.9
$i=3$	27.7 28.5	30.7 30.4	26.9 26.3	29.7 30.2	29.2 28.9
$i=4$	29.2 29.3	32.4 32.4	27.7 28.9	31.8 30.7	30.3 29.9

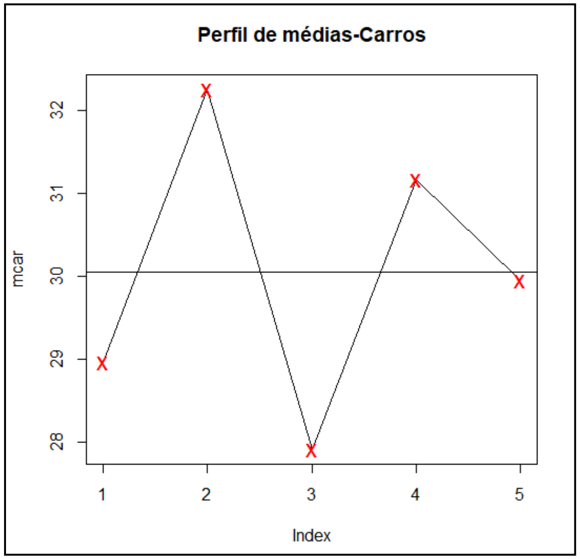
$\sigma^2_{AB} \Leftarrow$





$\Rightarrow \sigma^2_B$

$\sigma^2_A \Leftarrow$



Fator B: Motoristas	Fator A: Carros				
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$i=1$	25.3 25.2	28.9 30.0	24.8 25.1	28.4 27.9	27.1 26.6
$i=2$	33.6 32.9	36.7 36.5	31.7 31.9	35.6 35.0	33.7 33.9
$i=3$	27.7 28.5	30.7 30.4	26.9 26.3	29.7 30.2	29.2 28.9
$i=4$	29.2 29.3	32.4 32.4	27.7 28.9	31.8 30.7	30.3 29.9

Modelo com Dois Fatores Aleatórios

r=2, a=5, b=4
n=40

```
Tabela de ANOVA: Modelo com 2 Fatores Aleatórios
                                  Df   Sum Sq  Mean Sq  F value
Carros (A: aleatório0              4   94.713   23.678  23.678/0.204=116.07
Motorista (B: aleatório)           3  280.285   93.428  93.428/0.204=457.98
Carros*Motorista                  12    2.446    0.204  0.204/0.176=1.159
Residuals                         20    3.515    0.176
```

```
Significância dos Componentes de variância (CV)
CV          Estimativa       vapor-p   valor-p ajustado.fdr
Fator A          2.934   1.745695e-09          5.237085e-09*
Fator B          9.322   1.226574e-12          3.679723e-12*
Fator AB         0.014   3.714839e-01          1.000000e+00
```

Rejeitar $\sigma_A^2 = 0$
Rejeitar $\sigma_B^2 = 0$
Não Rejeitar $\sigma_{AB}^2 = 0$

$\hat{\mu} = 30.05 \qquad dp\left(\hat{\mu}\right) = 1.7096$

Modelo com Três Fatores Aleatórios

Quadrado Médio Esperado

Source	EMS
A	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nc\sigma^2_{\alpha\beta} + nb\sigma^2_{\alpha\gamma} + nbc\sigma^2_{\alpha}$
B	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nc\sigma^2_{\alpha\beta} + na\sigma^2_{\beta\gamma} + nac\sigma^2_{\beta}$
C	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nb\sigma^2_{\alpha\gamma} + na\sigma^2_{\beta\gamma} + nab\sigma^2_{\gamma}$
AB	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nc\sigma^2_{\alpha\beta}$
AC	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + nb\sigma^2_{\alpha\gamma}$
BC	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + na\sigma^2_{\beta\gamma}$
ABC	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
Error	σ^2

Há Testes F exatos para testar os efeitos aleatórios ABC, AB, AC e BC. MAS não há testes exatos para testar os Efeitos Principais A, B e C. Testes aproximados precisam ser obtidos no caso de modelos com 3 ou mais fatores aletórios.

Modelo Misto: Um Fator Fixo e Um Fator Aleatório

A eficiência de três Métodos de Ensino (I, II e III) foi avaliada por meio do desempenho do aluno. Cinco instrutores habilitados a conduzir tais Métodos foram aleatoriamente escolhidos de um cadastro para fazerem parte do estudo. Quinze grupos de quatro alunos considerados homogêneos segundo o conhecimento do assunto foram então

Método de Ensino	**I**				**II**				**III**			
Instr. 1	65	68	56	45	74	69	52	73	69	63	81	67
Instr. 2	58	62	65	56	81	76	56	78	83	70	72	79
Instr. 3	63	75	58	54	76	80	62	83	74	72	73	73
Instr. 4	57	64	70	48	80	78	58	75	78	68	76	77
Instr. 5	66	70	64	60	68	73	51	76	80	75	70	71

Considere a análise destes dados: há diferença no desempenho esperados dos alunos de acordo com os três Métodos de Ensino?

Método de Ensino deve ser modelado como Fator Fixo ou Alea'torio? E Instrutor?

Proponha outras situações experimentais em que um modelo misto desse tipo seria útil.

Modelo Misto

$$y_{ijk} = \mu_{jk} + e_{ijk} = \overbrace{\mu + \tau_j}^{\text{Componente fixo}} + \overbrace{\beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk};}^{\text{Componente aleatório}} \quad i = 1,\ldots,n_{jk};\ j = 1,\ldots,a;\ k = 1,\ldots,b$$

$$\sum_{j=1}^{a} \tau_j = 0; \qquad \beta_k \sim N\left(0\,;\sigma_B^2\right);$$

Formulação restrita do modelo misto

$$\gamma_{jk} \sim N\left(0\,;\frac{a-1}{a}\sigma_{AB}^2\right); \boxed{\sum_{j=1}^{a} \gamma_{jk} = 0;}\ Cov\left(\gamma_{jk};\gamma_{j'k}\right) = -\frac{1}{a}\sigma_{AB}^2 \qquad j \neq j'$$

$$e_{ijk} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right); \quad \beta_k \perp \gamma_{jk} \perp e_{ijk}$$

$$y_{ijk} \sim N\left(\mu + \tau_i\,;\sigma_B^2 + \frac{a-1}{a}\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$Cov\left(y_{ijk};y_{i'j'k'}\right) = \begin{cases} \sigma_B^2 + \dfrac{a-1}{a}\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2 & i = i' \\ \sigma_B^2 + \dfrac{a-1}{a}\sigma_{AB}^2 & i \neq i', j = j'; k = k' \\ \sigma_B^2 - \dfrac{1}{a}\sigma_{AB}^2 & i \neq i', j \neq j'; k = k' \\ 0 & k \neq k' \end{cases}$$

Modelos Lineares Mistos

Delineamentos com Dois Fatores Cruzados AxB: A de Efeito Fixo e B de Efeito Aleatório

FV	#g.l.	E(QM)
A	$a - 1$	$\sigma_e^2 + rb\dfrac{\sum_j \tau_j^2}{a-1} + r\sigma_{AB}^2$
B	$b - 1$	$\sigma_e^2 + ra\sigma_B^2$
AB	$(a-1)(b-1)$	$\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2$
Resíduo	n-ab=ab$(r-1)$	σ_e^2

Neter et al., 2005

SQ, QM e número de g.l. são calculados como no caso de um modelo ANOVA de efeitos fixos. O denominador da estatística F mudará de acordo com o valor esperado do QM, isto é, E(QM).

Modelo Linear Misto

```
Tabela de ANOVA – Modelo Misto
                               Df  Sum Sq Mean Sq   F value
Método (A:Fixo)                 2 1695.63  847.82   FA: 847.82/27.75=30.55 <0.001*
Instrutor (B:Aleatório)         4  190.57   47.64   FB:  47.64/66.50= 0.72 0.5851
Método*Instrutor(AB:Aleat) 8  222.03   27.75   FAB: 27.75/66.50=0.42  0.9045
Residuals                      45 2992.50   66.50
```

$$H_{0AB}: \sigma^2_{AB} = 0 \quad \Rightarrow F_{AB} = \frac{QM(AB)}{QM\,\mathrm{Res}} \sim F_{8,45}$$

Método de Ensino e Instrutor não interagem

$$H_{0B}: \sigma^2_{B} = 0 \quad \Rightarrow F_{B} = \frac{QM(B)}{QM\,\mathrm{Res}} \sim F_{4,45}$$

A variabilidade entre instrutores não é significante

$$H_{0A}: \tau_j = 0 \quad \Rightarrow F_{A} = \frac{QM(A)}{QM(AB)} \sim F_{2,4}$$

Há (pelo menos uma) diferença significante entre o desempenho esperado dos alunos de acordo com Método de Ensino

Modelo Linear Misto

$$y_{ijk} = \mu_{jk} + e_{ijk} = \boxed{\mu + \tau_j} + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}; \quad i = 1,\ldots,r;\ j = 1,\ldots,a;\ k = 1,\ldots,b$$

$$\mu_j \qquad \sum_{j=1}^{a} \tau_j = 0$$

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{\ldots} \qquad \hat{\tau}_j = \hat{\mu}_j - \hat{\mu} = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{\ldots}$$

$$Var\left(\hat{\tau}_j\right) = \frac{\sigma_e^2 + r\sigma_{AB}^2}{br} = \frac{E\left(QMAB\right)}{br} \Rightarrow \hat{V}ar\left(\hat{\tau}_j\right) = \frac{QMAB}{br}$$

$$H_0 : \tau_j = 0; \qquad \frac{\hat{\tau}_j}{\sqrt{\hat{V}ar\left(\hat{\tau}_j\right)}} \sim t_{(a-1)(b-1)}$$

Modelo Linear Misto

$$y_{ijk} = \mu_{jk} + e_{ijk} = \mu + \tau_j + \boxed{\beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}};$$

$$\sigma_B^2; \quad \sigma_{AB}^2; \quad \sigma_e^2$$

$$\sigma_B^2 = \frac{E(QMB) - E(QM\,\mathrm{Re}\,s)}{ra} \Rightarrow \hat{\sigma}_B^2 = \frac{QMB - QM\,\mathrm{Re}\,s}{ra}$$

$$\sigma_{AB}^2 = \frac{E(QMAB) - E(QM\,\mathrm{Re}\,s)}{r} \Rightarrow \hat{\sigma}_{AB}^2 = \frac{QMAB - QM\,\mathrm{Re}\,s}{r}$$

$$\sigma_e^2 = E(QM\,\mathrm{Re}\,s) \Rightarrow \hat{\sigma}_e^2 = QM\,\mathrm{Re}\,s$$

Intervalos de Confiança aproximados para Componentes de Variância em modelos balanceados podem ser obtidos por meio do procedimento de Satterthwaite que identifica os estimadores desses CV como combinações lineares de Quadrados Médios.

Modelo Linear Misto

Tabela de ANOVA - Modelo Misto

	Df	Sum Sq	Mean Sq	**F value**	
Método (A:Fixo)	2	1695.63	847.82	FA: 847.82/27.75=30.55	<0.001*
Instrutor (B:Aleatório)	4	190.57	47.64	FB: 47.64/66.50= 0.72	0.5851
Método*Instrutor(AB:Aleat)	8	222.03	27.75	FAB: 27.75/66.50=0.42	0.9045
Residuals	45	2992.50	66.50		

Médias por Método de Ensino

1	2	3	
61.20	70.95	73.55	68.57

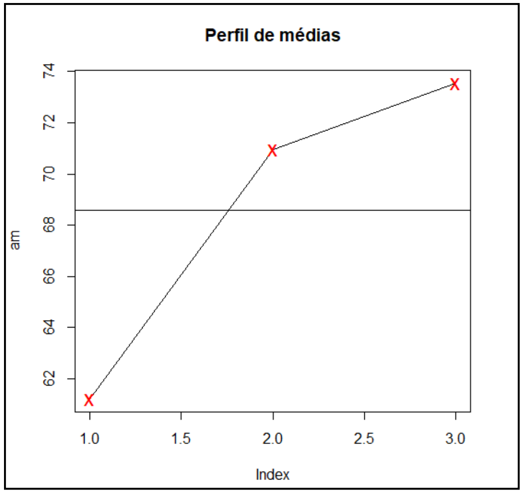
$$\hat{\tau}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$$

$$\hat{Var}\left(\hat{\tau}_j\right) = \frac{27.75}{5*4} = 1,388$$

$$\hat{\tau}_1 = -7,37 \quad t_1 = -6,26$$

$$\hat{\tau}_2 = -7,37 \quad t_2 = 2,02$$

$$\hat{\tau}_3 = -7,37 \quad t_3 = 4,22$$



Valor-p ajustado	1	2	3
Bonferroni	0.0007343535	0.2330218528	0.0086255918
FDR	0.0007343535	0.0776739509	0.0043127959

Conclusão sobre o efeito de Método de Ensino?

Modelo Linear Misto

Tabela de ANOVA - Modelo Misto

	Df	Sum Sq	Mean Sq	**F value**	
Método (A:Fixo)	2	1695.63	847.82	FA: 847.82/27.75=30.55	<0.001*
Instrutor (B:Aleatório)	4	190.57	47.64	FB: 47.64/66.50= 0.72	0.5851
Método*Instrutor(AB:Aleat)	8	222.03	27.75	FAB: 27.75/66.50=0.42	0.9045
Residuals	45	2992.50	66.50		

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{QMB - QM\,\mathrm{Re}\,s}{ra} = -1{,}57$$

$$\hat{\sigma}_{AB}^2 = \frac{QMAB - QM\,\mathrm{Re}\,s}{r} = -9.69$$

Não significantes. Podem ser considerados nulos.

$$\hat{\sigma}_e^2 = QM\,\mathrm{Re}\,s = 66.5$$

Modelos Lineares Mistos

Delineamentos com Dois Fatores

Expected Mean Squares for Balanced Two-Factor ANOVA Models.

Mean Square	df	Fixed ANOVA Model (A and B fixed)	Random ANOVA Model (A and B random)	Mixed ANOVA Model (A fixed, B random)
MSA	$a-1$	$\sigma^2 + nb\frac{\sum \alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + nb\sigma_\alpha^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + nb\frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
MSB	$b-1$	$\sigma^2 + na\frac{\sum \beta_j^2}{b-1}$	$\sigma^2 + na\sigma_\beta^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + na\sigma_\beta^2$
$MSAB$	$(a-1)(b-1)$	$\sigma^2 + n\frac{\sum\sum(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
MSE	$(n-1)ab$	σ^2	σ^2	σ^2

n: número de réplicas

Neter et al., 2005

Modelo Misto: Um Fator Fixo e Um Fator Aleatório

Um nutricionista está interessado no consumo de 5 tipos de Menus. Restaurantes foram amostrados de um município e o consumo dos Menus (número de pedidos) foi avaliado.

	Tipo de Menu				
Restaurante	1	2	3	4	5
1	11	13	10	18	15
2	20	28	15	30	18
3	8	10	8	16	12
4	30	35	27	41	28

	Tipo de Menu				
Restaurante	1	2	3	4	5
5	14	16	13	22	16
6	25	27	26	33	25
7	43	46	41	55	42
8	13	14	12	20	13

Considere a análise destes dados supondo que existe correlação entre pedidos feitos em um mesmo restaurante.

Modelagem: Tipo de Menu como Fator Fixo e Restaurante como Fator Aleatório.
Como fica definida a estrutura de correlação entre as observações?
Qual é a diferença dos modelos se Restaurante for assumido como Fator Bloco?

Modelo Linear Misto – Formulação Matricial

$$y_{ijk} = \mu + \tau_j + u_{1k} + u_{2jk} + e_{ijk}$$

$$\sum_j \tau_j = 0,$$

Formulação com restrição

$$u_{1k} \sim N\left(0;\sigma_1^2\right),\ u_{2jk} \sim N\left(0;\sigma_{12}^2\right),\ \boxed{\sum_j u_{2jk} = 0}$$

$$e_{ijk} \sim N\left(0;\sigma_e^2\right),\quad u_{1k} \perp u_{2jk} \perp e_{ijk}$$

$$y_{ijk} \sim N\left(\mu + \tau_i\ ; \sigma_1^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_e^2\right) \quad Cov\left(y_{ijk}; y_{i'j'k'}\right) = \begin{cases} \sigma_1^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_e^2 & i = i' \\ \sigma_1^2 + \sigma_{12}^2 & i \neq i', j = j'; k = k' \\ \sigma_1^2 - \sigma_{12}^2 & i \neq i', j \neq j'; k = k' \\ 0 & k \neq k' \end{cases}$$

$$Y_{n\times 1} = X_{n\times p}\beta_{p\times 1} + Z_{n\times q}u_{q\times 1} + e_{n\times 1}$$

$$E\left(Y\right) = X\beta$$

$$Cov\left(Y\right) = Z'\Delta Z + \Sigma$$

Modelo Linear Misto – Formulação Matricial

$$Y_{n\times 1} = X_{n\times p}\beta_{p\times 1} + Z_{n\times q}u_{q\times 1} + e_{n\times 1}$$

$$E(Y) = X\beta$$

$$Cov(Y) = Z'\Delta Z + \Sigma$$

Delineamento Fatorial 2x2 com r=2 replicas, fator A fixo e fator B aleatório

i=1,2
j=1,2
k=1,2

$$Y_{8\times 1} = \begin{pmatrix} y_{111} \\ y_{211} \\ y_{121} \\ y_{221} \\ y_{112} \\ y_{212} \\ y_{122} \\ y_{222} \end{pmatrix} Y_{n\times 1}, \quad X_{8\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_{2\times 1} = \begin{pmatrix} \mu \\ \tau_1 \end{pmatrix}, \quad Z_{8\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad u_{4\times 1} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{211} \\ u_{212} \end{pmatrix}$$

$$Cov(Y)_{8\times 8} = Z' \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{12}^2 \end{pmatrix} Z + I_8\sigma_e^2$$

Delineamentos SpliPlot

Parcela subdividida

Em muitas situações, os tratamentos em estrutura fatorial podem ser alocados em configurações de blocagem e unidades experimentais que levam à ideia de dois ou mais tamanhos de unidades experimentais no mesmo delineamento.

Isso ocorre devido a restrições práticas, de forma que para aplicar os níveis de alguns fatores é necessário o uso de parcelas “grandes” enquanto que os níveis dos outros fatores podem ser aplicados em parcelas “menores” ⇒ restrição na aleatorização.

Qual é a definição de uma unidade experimental?

Exemplo (Agronomia): avaliar os efeitos de 4 variedades e 3 níveis de irrigação na produção de feijão. Plantas de uma variedade podem ser alocadas em canteiros não muito grandes, ou até mesmo em vasos. Mas na irrigação, a área irrigada, fixando um dos níveis desejados deste fator, deve ser bem maior.

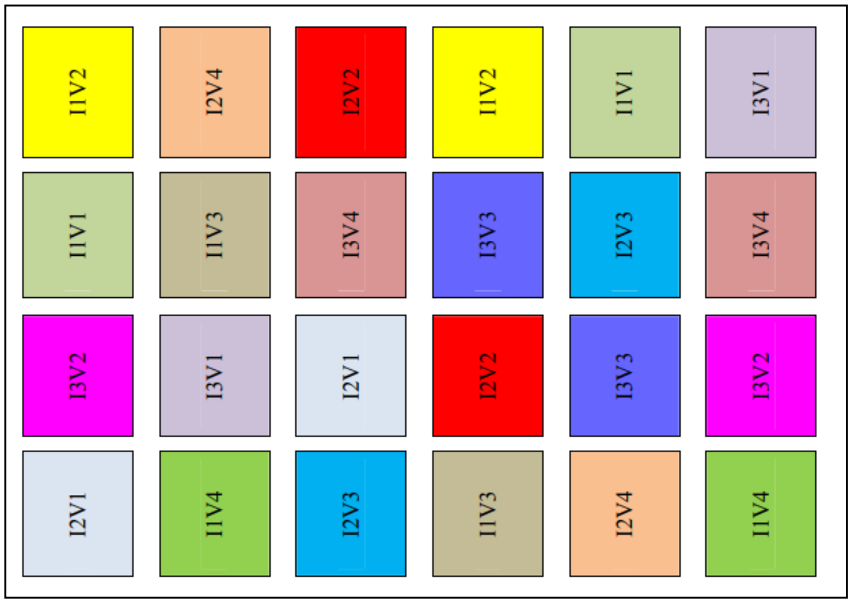
Fatorial 4x3

Como deve ser particionada a área do estudo?

Delineamentos SpliPlot

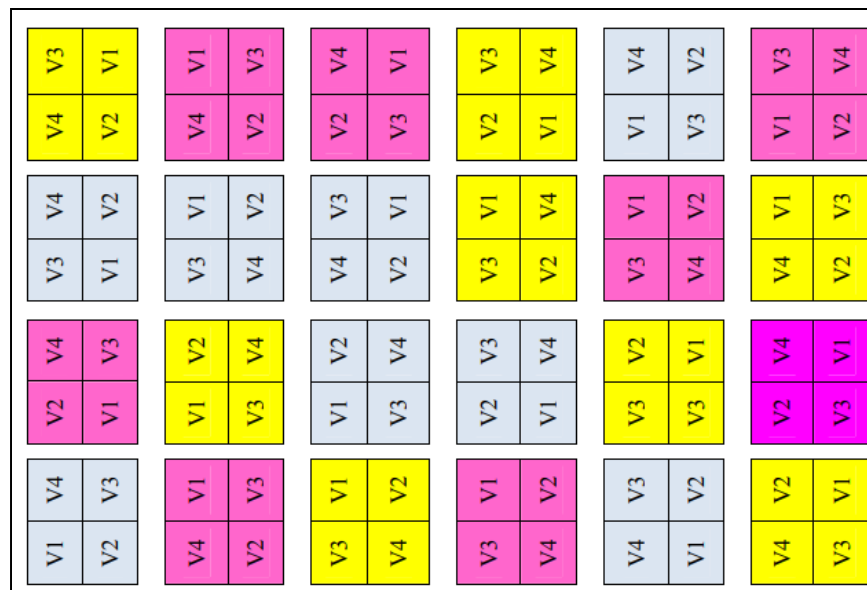
Parcela subdividida

Alternativa 1: DCA com 24 unidades experimentais

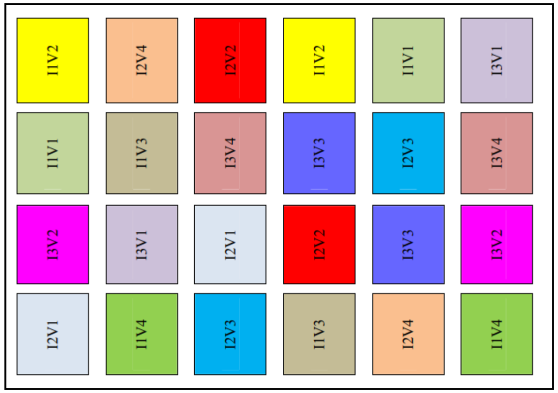


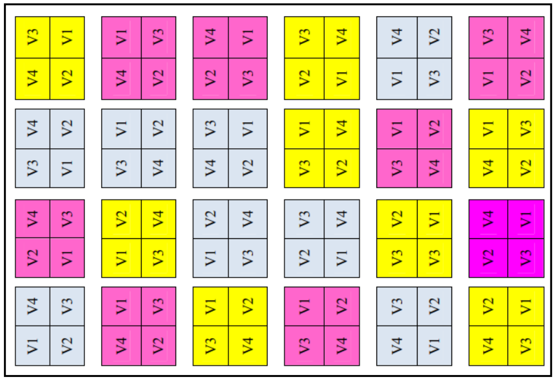
Os 12 tratamentos são aleatorizados a 24 u.e. (replicas = 2)

Alternativa 2: As irrigações (I1, I2 e I3) são aleatorizadas aos 24 canteiros (u.e.1). Em cada canteiro, as variaedades (V1, V2, V3 e V4) são aleatorizadas às sub-parcelas (u.e.2 dentro da u.e.1).



Delineamentos SpliPlot





Alternativa 1: Modelo

$$y_{ijk} = \mu + \tau_j + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}$$

$$j = 1,2,3; \;\; k = 1,2,3,4; \;\; i = 1,2$$

$$\sum_j \tau_j = \sum_k \beta_k = \sum_j \gamma_{jk} = \sum_k \gamma_{jk} = 0$$

$$e_{ijk} \sim N\left(0;\sigma^2\right)$$

n=24

Alternativa 2: Modelo

$$y_{ijk} = \mu + \tau_j + u_{ij} + \beta_k + \gamma_{jk} + e_{ijk}$$

$$u_{ij} \sim N\left(0;\sigma_1^2\right) \quad \perp \quad e_{ijk} \sim N\left(0;\sigma_e^2\right)$$

Covariância entre respostas da mesma parcela: simetria composta (uniforme)

$$Cov\left(y_{ijk}, y_{i'jk'}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2+\sigma_e^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ & \sigma_1^2+\sigma_e^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sim & & \sigma_1^2+\sigma_e^2 & \sigma_1^2 \\ & & & \sigma_1^2+\sigma_e^2 \end{pmatrix}$$

n_1=24, $n_{2(1)}$=4 $\Rightarrow$ n=96 (3*4*8)

Delineamentos SpliPlot

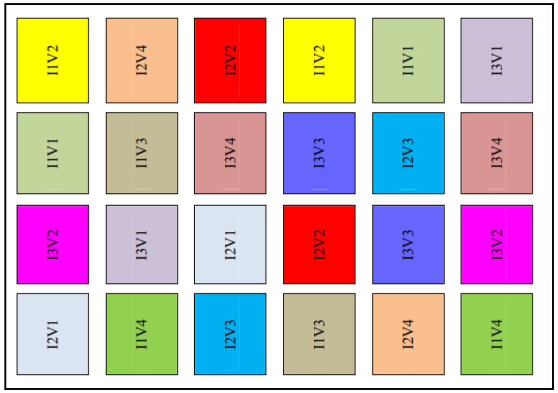
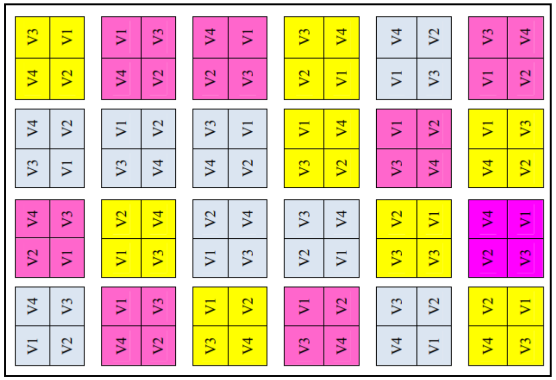


Tabela de ANOVA

Alternativa 1

Fontes de Variação	GL
Irrigação	2
Variedade	3
Interação	6
Resíduo	19
Total	23



$n_1=24$
$r_1=8$

Tabela de ANOVA

Alternativa 2

Fontes de Variação	GL	
Irrigação	2	a-1
Resíduo 1	21	$a(r_1-1)$
Sub-total	23	(n_1-1)
Variedade	3	b-1
Interação	6	(a-1)(b-1)
Resíduo 2	63	$a(b-1)(r_1-1)$
Total	95	(n-1)

Delineamentos SpliPlot

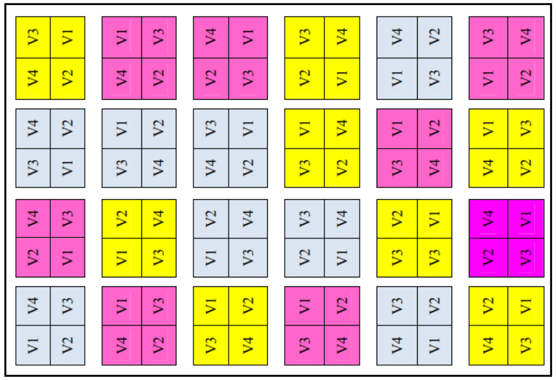


Tabela de ANOVA

Alternativa 2

Fontes de Variação	GL
Irrigação	2
Resíduo 1	21
Sub-total	23
Variedade	3
Interação	6
Resíduo 2	63
Total	95

24=3 x 8

3 níveis de irrigação cada um com **r=8**

O delineamento pode ser reduzido para **r=5** réplicas no primeiro nível de aleatorização

Fontes de Variação	GL
Irrigação	2
Resíduo 1	12
Sub-total	14
Variedade	3
Interação	6
Resíduo 2	36
Total	59

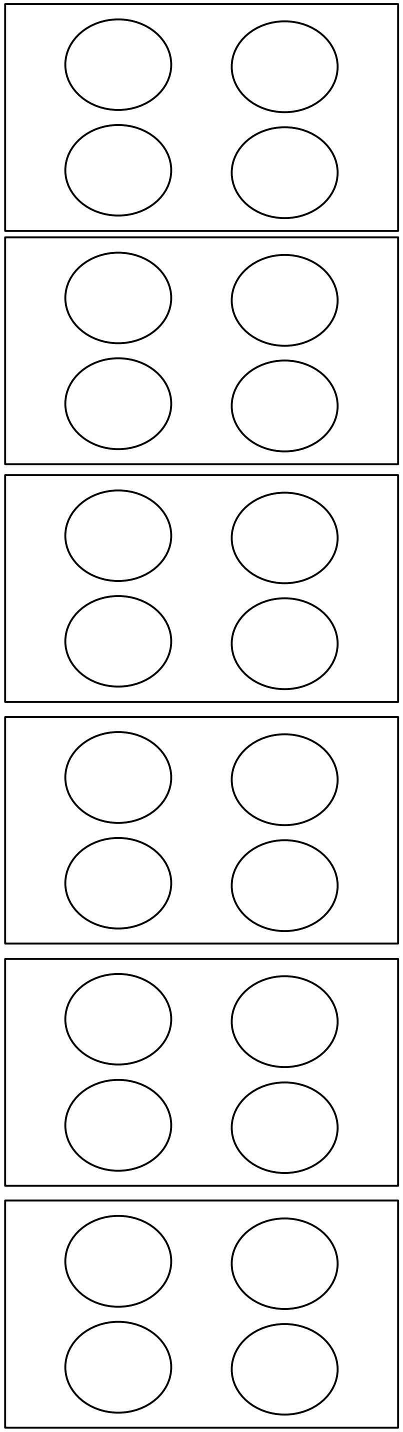
Delineamentos SpliPlot
ou Delineamentos Multi-Estratificados

Muitas fontes de variação

O exemplo Fatorial 3x4 (Irrigação e Variedades)ilustra um delineamento balanceado em parcelas-subdivididas com dois fatores.

O balanceamento pode ficar mais difícil de ser garantido quando o número de fatores aumenta devido a restrições no número de sub-parcelas.

Cada Parcela Principal pode ser vista como um Bloco para o delineamento referente aos fatores nas sub-parcelas. CONTUDO, neste caso, as observações dentro do bloco apresentam covariâncias (não são assumidas independentes).



Delineamentos SpliPlot

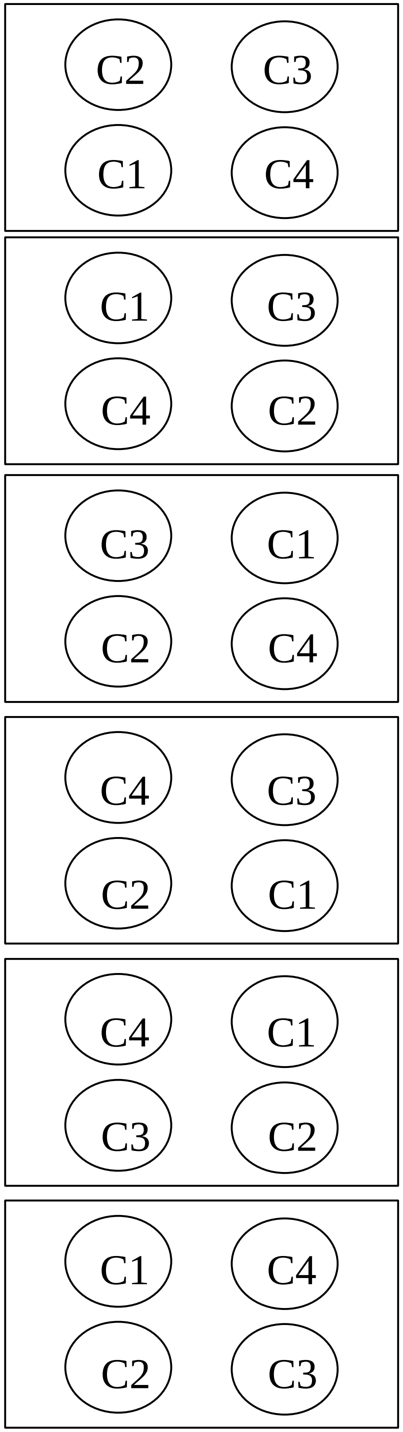
Experimento industrial: Verificar a resistência à corrosão de barras de aço revestidas com 4 materiais diferentes (C1, C2, C3, C4) e submetidas a 3 diferentes temperaturas (360°C, 370°C e 380°C).

Condição experimental: existem 6 fornos com 4 colunas de aquecimento.

Aleatorização 1: aleatorizar as 3 temperaturas aleatoriamente aos 6 fornos.

Aleatorização 2: aleatorizar os 4 tratamentos nas posições de cada forno.

Delineamentos SpliPlot



Experimento industrial: Verificar a resistência à corrosão de barras de aço revestidas com 4 materiais diferentes (C1, C2, C3, C4) e submetidas a 3 diferentes temperaturas (360°C, 370°C e 380°C).

Condição experimental: existem 6 fornos com 4 colunas de aquecimento.

Aleatorização 1: aleatorizar as 3 temperaturas aleatoriamente aos 6 fornos.

Aleatorização 2: aleatorizar os 4 tratamentos nas posições de cada forno.

Temp	C1	C2	C3	C4
360	67	73	83	89
	33	8	46	54
370	65	91	87	86
	140	142	121	150
380	155	127	147	212
	108	100	90	153

Delineamentos SpliPlot

Esqueleto da ANOVA

n1=6, r1=2, a=3, b=4, n=24

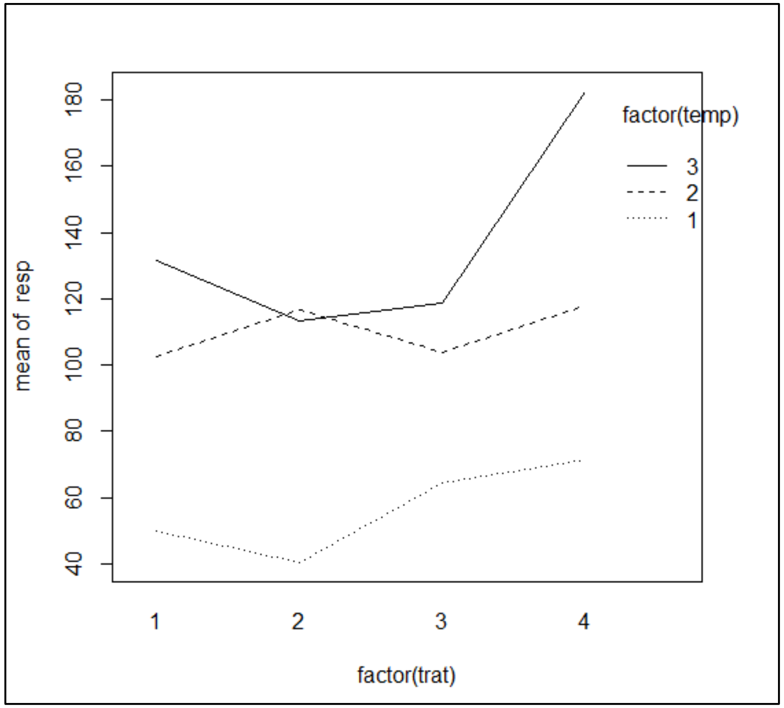
FV	nGL
Temp	(3-1)=2
Res1	3(2-1)=3
SubTotal	**(6-1)=5**
Trat	(4-1)=3
Temp*trat	(3-1)(4-1)=6
Res2	3(4-1)(2-1)=9
Total	**24-1=23**

Tabela de ANOVA

	npar	Sum Sq	Mean Sq	F value
factor(temp)	2	686.2	343.09	2.7548
factor(trat)	3	4289.1	1429.71	11.4798
factor(temp):factor(trat)	6	3269.8	544.96	4.3757

Efeitos aleatórios

Groups	Name	Std.Dev.
u1	(Intercept)	34.24
Residual		11.16

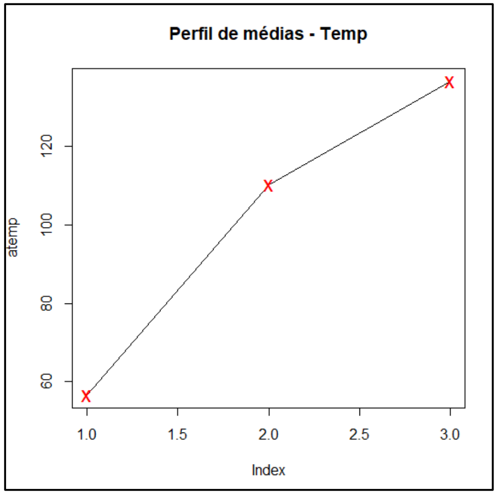


IC Bootstrap

	2.5 %	97.5 %
.sig01	12.301025	85.66795
.sigma	5.882823	15.18173
(Intercept)	1.175311	106.38312
factor(temp)2	-16.959406	125.83224
factor(temp)3	15.263402	149.43436
factor(trat)2	-31.416970	13.16407
factor(trat)3	-8.594895	36.83418
factor(trat)4	-1.077222	42.24273
factor(temp)2:factor(trat)2	-8.613674	54.12488
factor(temp)3:factor(trat)2	-39.112258	24.33737
factor(temp)2:factor(trat)3	-43.131832	18.57100
factor(temp)3:factor(trat)3	-57.476223	2.43436
factor(temp)2:factor(trat)4	-36.182818	27.38706
factor(temp)3:factor(trat)4	-1.716140	60.24685

Não há ef. Interação $\Rightarrow$ Modelo reduzido

Delineamentos SpliPlot



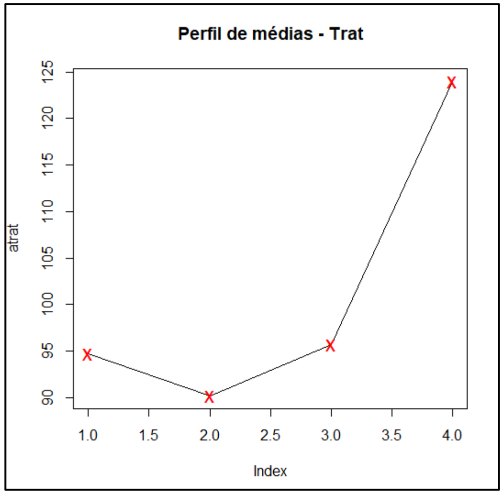


Tabela de ANOVA – Modelo reduzido (aditivo)

	npar	Sum Sq	Mean Sq	F value
factor(temp)	2	1612.7	806.36	2.7548
factor(trat)	3	4289.1	1429.71	4.8844

Efeitos aleatórios

Groups	Name	Variance	Std.Dev.
u1	(Intercept)	1130.1	33.62
Residual		292.7	17.11

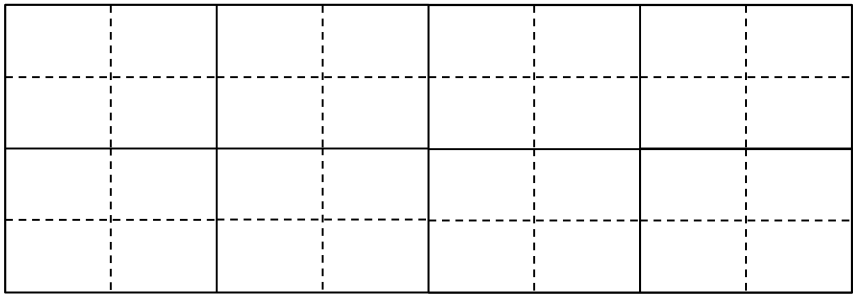
Efeito de Temp (valor-p ajustado)

contrast	estimate	SE	df	t.ratio	p.value
1 - 2	-53.6	34.7	3	-1.546	0.3896
1 - 3	-79.9	34.7	3	-2.303	0.1987
2 - 3	-26.2	34.7	3	-0.757	0.7512

Efeito de Trat (valor-p ajustado)

contrast	**estimate**	**SE**	**df**	**t.ratio**	**p.value**
1 - 2	4.5	9.88	15	0.456	0.9675
1 - 3	-1.0	9.88	15	-0.101	0.9996
1 - 4	-29.3	9.88	15	-2.970	0.0424
2 - 3	-5.5	9.88	15	-0.557	0.9432

Delineamentos SpliPlot



Descrever a estrutura deste delineamento Spli-Plot.

n1=8: número de plotes completos do primeiro nível de aleatorização

r1= 4

a = 2, b=4

n=32

Ohelert (2010): john

	plot	fertilizer	variety	mass
1	7	control	A	11.6
2	7	control	B	7.7
3	7	control	C	12.0
4	7	control	D	14.0
5	5	control	A	8.9
6	5	control	B	9.5
7	5	control	C	11.7
8	5	control	D	15.0
9	6	control	A	10.8
10	6	control	B	11.0
11	6	control	C	12.1
12	6	control	D	12.9
13	1	control	A	10.0
14	1	control	B	9.3
15	1	control	C	12.4
16	1	control	D	15.0
17	8	new	A	16.7
18	8	new	B	14.6
19	8	new	C	18.2
20	8	new	D	18.1
21	2	new	A	15.1
22	2	new	B	11.6
23	2	new	C	15.3
24	2	new	D	16.7
25	4	new	A	18.0
26	4	new	B	11.5
27	4	new	C	16.9
28	4	new	D	20.6
29	3	new	A	15.9
30	3	new	B	17.4
31	3	new	C	17.1
32	3	new	D	18.6

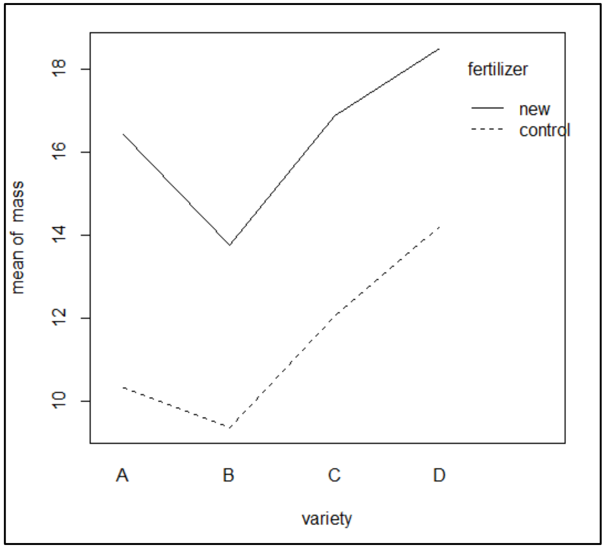
Delineamentos SpliPlot

Tabela de ANOVA - Dados Oehlert (2010)

```
                    npar  Sum Sq Mean Sq F value
fertilizer             1 137.413 137.413 68.2395
variety                3  96.431  32.144 15.9627
fertilizer:variety     3   4.173   1.391  0.6907
```

Efeitos aleatórios

```
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 plot     (Intercept) 0.2003   0.4475
 Residual             2.0137   1.4190
Number of obs: 32, groups:  plot, 8
```

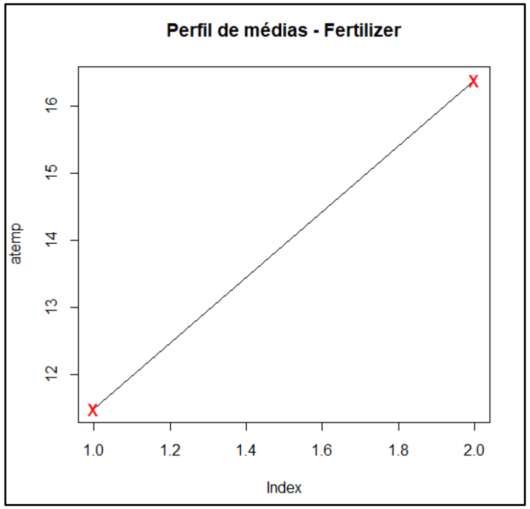


IC (method="Wald")

```
                              2.5 %     97.5 %
(Intercept)               8.8668479 11.7831521
fertilizernew             4.0378616  8.1621384
varietyB                 -2.9166559  1.0166559
varietyC                 -0.2416559  3.6916559
varietyD                  1.9333441  5.8666559
fertilizernew:varietyB   -4.4812715  1.0812715
fertilizernew:varietyC   -4.0562715  1.5062715
fertilizernew:varietyD   -4.6062715  0.9562715
```

Não há ef. Interação ⇒ Modelo reduzido

Delineamentos SpliPlot



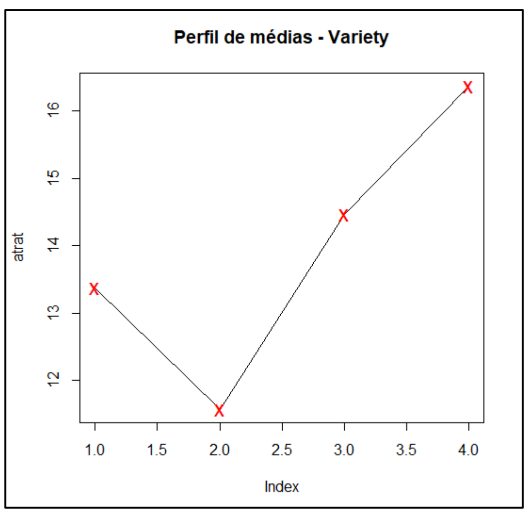


Tabela de ANOVA – Moodelo reduzido (aditivo)

	npar	Sum Sq	Mean Sq	F value
fertilizer	1	131.341	131.341	68.240
variety	3	96.431	32.144	16.701

Efeitos aleatórios

Groups	Name	Variance	Std.Dev.
plot	(Intercept)	0.2225	0.4717
Residual		1.9247	1.3873

IC (method="bootstrap")

	2.5 %	97.5 %
.sig01	0.0000000	1.2245619
.sigma	0.9498976	1.7605467
(Intercept)	9.7869441	12.1378883
fertilizernew	3.7030075	6.0429866
varietyB	-3.1827331	-0.5035862
varietyC	-0.3277087	2.4025891
varietyD	1.6860275	4.3465932

Ajustar o modelo sem o efeito aleatório

Efeito de Fertilizer

	estimate	SE	df	t.ratio	p.value
control - new	-4.9	0.593	6	-8.261	0.0002

Efeito de Variety

contrast	estimate	SE	df	t.ratio	p.value
A - B	1.80	0.694	21	2.595	0.0739
A - C	-1.09	0.694	21	-1.568	0.4174
A - D	-2.99	0.694	21	-4.307	0.0016
B - C	-2.89	0.694	21	-4.163	0.0023
B - D	-4.79	0.694	21	-6.902	<.0001
C - D	-1.90	0.694	21	-2.739	0.0552

Delineamento Split-Plot

A partição (split) é nas Unidades Experimentais

Split-split-plot

		Técnica 1					Técnica 2				
Tecido	MP	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10
T1	Gel										
	Sol										
	Filt										
	Pip										
T2	Gel										
	Sol										
	Filt										
	Pip										
T3	Gel										
	Sol										
	Filt										
	Pip										
T4	Gel										
	Sol										
	Filt										
	Pip										

Quantificação de proteínas em Tecidos Tumorais de acordo com o Método de Preparação (MP) das amostras e Técnica de leitura

Estrutura das Unidades Experimentais:

- Cada amostra de tecido é particionada (split) em 4 pedaços que são aleatorizados aos MP
- Cada solução preparada é particionada (split) em 10 alícotas, metade das quais é aleatorizada às Técnicas 1 ou 2.

Estrutura de Tratamentos:

Dois fatores (Método de Preparação e Técnica) cruzados (Fatorial 2x4) hierárquicos dentro de Tecido.

Quais são as unidades amostrais, experimentais e de mensuração? Há possível dependência entre observações dentro do mesmo tecido? E entre as replicas dentro de tecido e do mesmo MP?