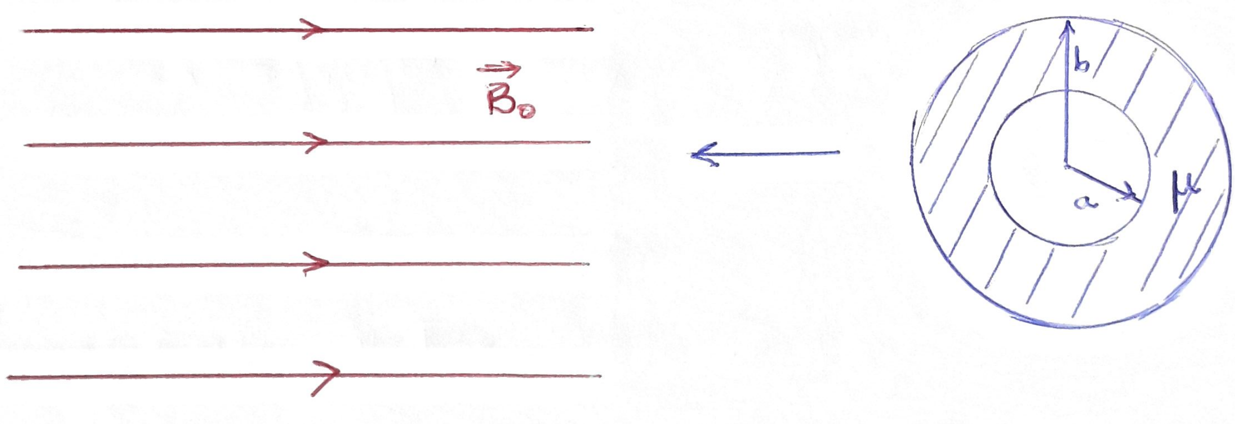
Exercício 3b-5

Uma casca cilíndrica longa de raio interno a e externo b é feita de material homogêneo e linear de permeabilidade magnética μ. e posicionada de forma que seu eixo de simetria é perpendicular a um campo magnético $\vec{B}_0$ inicialmente uniforme. Determine o campo magnético em todo o espaço.



As linhas de campo magnético são uniformes antes da introdução da casca cilíndrica e devem ser deformadas pelo processo de magnetização da casca.

Como não há correntes livres nesse problema no espaço todo, $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ e, portanto, $\vec{H}$ pode ser escrito como

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} W$$

onde W é um potencial escalar magnetostático. Portanto, podemos também escrever

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\nabla^2 W = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2 W = \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

(Eq. de Poisson com $\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$ como fonte)

Além disso, como a casca é feita de material homogêneo e linear, temos que

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\vec{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\frac{\vec{B}}{\mu}$$

e, portanto, no interior da casca vale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\frac{1}{\mu}\,\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Temos então que o potencial W satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 W = 0$$

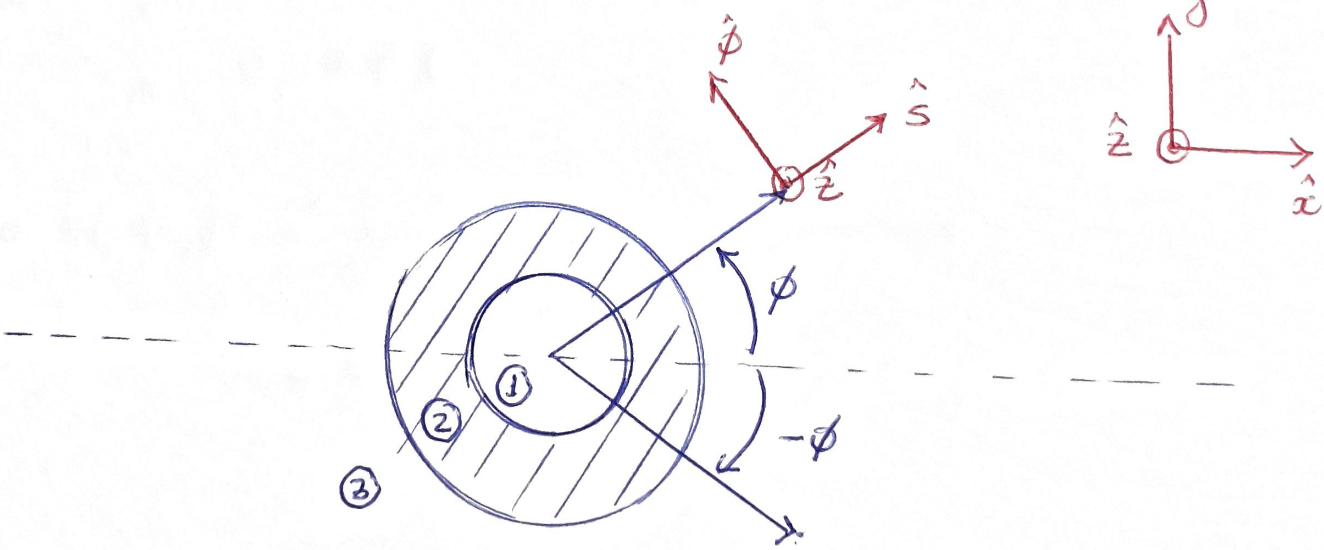
nas regiões $0 \leq s < a$ (1), $a < s < b$ (2) e $s > b$ (3).

Nesse problema, o potencial só depende de s e ϕ.

$$W(s,\phi) = S(s)\,\Phi(\phi) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{separação de}\\ \text{variáveis}\end{array}\right)$$

Solução geral

$$W(s,\phi) = \sum_{K=1}^{\infty} \Big\{ s^{K}\left[a_K \cos(K\phi) + b_K \sin(K\phi)\right] + s^{-K}\left[c_K \cos(K\phi) + d_K \sin(K\phi)\right] \Big\}$$



$$W(s,\phi) = W(s,-\phi) \Rightarrow b_K = d_K = 0 \quad \forall K$$

Então

$$W_i(s,\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{ik}\, s^{k} + d_{ik}\, s^{-k} \right) \cos(k\phi) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

Condições de contorno :

$$\lim_{s>>b} \vec{H} = \vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \frac{B_0}{\mu_0}\,\hat{x} = - \lim_{s>>b} \vec{\nabla} W_3$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{s>>b} W_3 = - \frac{B_0}{\mu_0}\, x = - \frac{B_0}{\mu_0}\, s \cos\phi$$

Concluímos então que

$$c_{3k} = \begin{cases} - B_0/\mu_0 \, , & k = 1 \\ 0 \, , & k \neq 1 \end{cases} \qquad d_{3k} = 0 \quad (k \neq 1)$$

Como $W_1(s,\phi)$ é finito para $s = 0$, temos

$$d_{1k} = 0 \quad \forall \, k$$

Portanto

$$\begin{cases} W_1(s,\phi) = \sum_{K=1}^{\infty} C_{1K}\, s^{K} \cos(K\phi) \\ W_2(s,\phi) = \sum_{K=1}^{\infty} \left(C_{2K}\, s^{K} + d_{2K}\, s^{-K}\right) \cos(K\phi) \\ W_3(s,\phi) = \left(-\frac{B_0}{\mu_0} s + \frac{d_{31}}{s}\right) \cos\phi \end{cases}$$

Sabemos também que o potencial W é contínuo no cruzamento de qquer superfície

$$W_1(a,\phi) = W_2(a,\phi) \qquad (\mathrm{I})$$

$$W_3(b,\phi) = W_2(b,\phi) \qquad (\mathrm{II})$$

Sabemos também que a componente de $\vec{H}$ normal a uma superfície pode ser descontínua

$$\Delta H^{\perp} = -\Delta M^{\perp}$$

Portanto, para a interface 3/2

$$H_3^{\perp} - H_2^{\perp} = M_2^{\perp} - \cancel{M_3^{\perp}}^{\,0}$$

$$-\left.\frac{\partial W_3}{\partial s}\right|_b + \left.\frac{\partial W_2}{\partial s}\right|_b = M_2^{\perp}(b,\phi) = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) H_2^{\perp}(b,\phi)$$

$$= -\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\left.\frac{\partial W_2}{\partial s}\right|_b$$

Então temos também

$$\mu_0 \left.\frac{\partial W_3}{\partial s}\right|_b = \mu \left.\frac{\partial W_2}{\partial s}\right|_b \quad (\mathrm{III})$$

$$\mu_0 \left.\frac{\partial W_1}{\partial s}\right|_a = \mu \left.\frac{\partial W_2}{\partial s}\right|_a \quad (\mathrm{IV})$$

$(\mathrm{II}) \Rightarrow C_{2k} = d_{2k} = 0 \quad p/\ k \neq 1$

$(\mathrm{I}) \Rightarrow C_{1k} = 0 \quad p/\ k \neq 1$

$$\begin{cases} W_1(s,\phi) = c_{11}\, s \cos\phi \\ \\ W_2(s,\phi) = \left(c_{21}\, s + \dfrac{d_{21}}{s} \right) \cos\phi \\ \\ W_3(s,\phi) = \left(-\dfrac{B_0}{\mu_0}\, s + \dfrac{d_{31}}{s} \right) \cos\phi \end{cases}$$

além disso, (I), (II), (III) e (IV) implicam também o seguinte conjunto de 4 eqs e 4 incógnitas ($c_{11}, c_{21}, d_{21}, d_{31}$)

$$B_0 + \frac{\mu_0 d_{31}}{b^2} = \mu \left(-c_{21} + \frac{d_{21}}{b^2} \right)$$

$$-B_0 + \frac{\mu_0 d_{31}}{b^2} = \mu_0 \left(c_{21} + \frac{d_{21}}{b^2} \right)$$

$$\mu \left(c_{21} - \frac{d_{21}}{a^2} \right) = \mu_0 c_{11}$$

$$c_{21} + \frac{d_{21}}{a^2} = c_{11}$$

a solução para C_{11} é

$$C_{11} = \frac{4\mu b^2 B_0}{a^2(\mu-\mu_0)^2 - b^2(\mu+\mu_0)^2}$$

Portanto o campo $\vec{H}_1$ é

$$\vec{H}_1 = -\vec{\nabla} W_1 = -\frac{\partial W_1}{\partial s}\hat{s} - \frac{1}{s}\frac{\partial W}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

$$= -C_{11}\left(\cos\phi\,\hat{s} - \sin\phi\,\hat{\phi}\right) = -C_{11}\hat{x}$$

Ou seja

$$\vec{H}_1 = \frac{4\mu b^2}{b^2(\mu+\mu_0)^2 - a^2(\mu-\mu_0)^2}\vec{B}_0$$

$$\vec{B}_1 = \mu_0\vec{H}_1 = \frac{4\mu_r}{(\mu_r+1)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2(\mu_r-1)^2}\vec{B}_0$$

$\left(\mu_r \equiv \frac{\mu}{\mu_0}\right)$

Perceba que

$\vec{B}_1(\mu_r \gg 1) \ll \vec{B}_0$ (blindagem magnética)