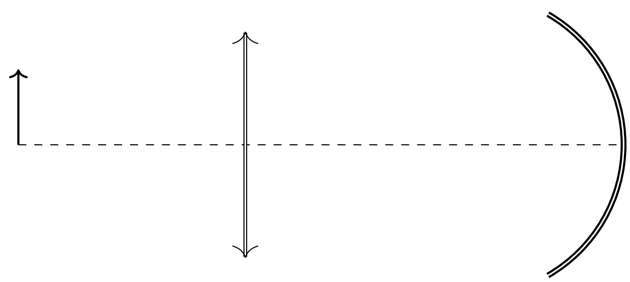
Lista 4 suplementar

Nícolas André da Costa Morazotti

24 de novembro de 2020

Questão 1

Um objeto com $10cm$ de altura está sobre o eixo ótico de um espelho côncavo com distância focal $f_E = 4m$, a $1km$ do espelho. Uma lente biconvexa com distância focal $f_l = 5cm$ também está posicionada sobre o eixo ótico do espelho, $3cm$ à frente do ponto onde se forma a imagem real do objeto (a imagem real está entre o espelho e a lente). Encontre a posição onde se forma a imagem produzida pela lente.



O espelho cria uma imagem real sobre o eixo óptico com a distância

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \tag{1}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1000} + \frac{1}{q} \tag{2}$$

$$q = \frac{1000}{249} \approx 4.016m. \tag{3}$$

Veja que a lente se encontra afastada do espelho $3cm$ a mais que a imagem gerada pelo espelho: $4.046m$. A lente então gera uma imagem à distância

$$\frac{1}{f_l} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}. \tag{4}$$

Em relação à lente, o objeto está a apenas $3cm$. Assim,

$$\frac{1}{5cm} = \frac{1}{3cm} + \frac{1}{q'} \tag{5}$$

$$\frac{1}{q'} = \frac{3-5}{15cm} \tag{6}$$

$$= -\frac{1}{7.5cm} \tag{7}$$

$$q' = -7.5cm. \tag{8}$$

A posição da imagem gerada pela lente em relação ao espelho é $4.046 - 0.075 = 3.971cm$.

Questão 2

Encontre a altura e outras características (real ou virtual; mesmo sentido ou de pernas para o ar em relação ao objeto) da imagem formada pela lente na questão 1.

A imagem gerada pelo espelho tem altura obtida por

$$\frac{y'}{y} = -\frac{q}{p} \tag{9}$$

$$\frac{y'}{10cm} = -\frac{401.6cm}{100000cm} \tag{10}$$

$$= -401.6 \cdot 10^{-4}cm \tag{11}$$

$$= -4.016 \cdot 10^{-2}cm. \tag{12}$$

Essa imagem, usada como objeto pela lente, tem tamanho

$$\frac{y''}{y'} = -\frac{q'}{p'} \tag{13}$$

$$-\frac{y''}{4.016 \cdot 10^{-2}cm} = -\frac{-7.5cm}{3cm} \tag{14}$$

$$-y'' = 2.5 \cdot 4.016 \cdot 10^{-2}cm \tag{15}$$

$$= 0.1004cm \tag{16}$$

$$y'' = -0.1004cm \tag{17}$$

Essa imagem é *virtual* (pois q', distância da imagem à lente, é negativo) e invertida em relação ao objeto inicial, já que é negativa também.

Questão 3

A lente na figura 1 tem distância focal $f = 2cm$. Faça um desenho mostrando o ponto P onde a luz se focalizará. Indique a distância até o centro da lente e o ângulo em relação à horizontal.

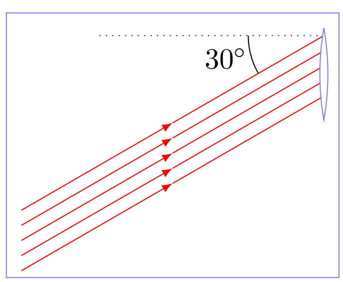


Figura 1: Questão 3.

Podemos encontrar onde a luz se focará considerando que os raios (já que são paralelos) são de um objeto muito distante. Sabemos que as lentes também obedecem a

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \tag{18}$$

$$q = \frac{pf}{p-f} \tag{19}$$

$$\approx f. \tag{20}$$

A altura pode ser encontrada utilizando o ângulo de 30°

$$\frac{y'}{y} = -\frac{q}{p} \tag{21}$$

$$y' = -q\frac{y}{p} \equiv -q\tan(30°) \tag{22}$$

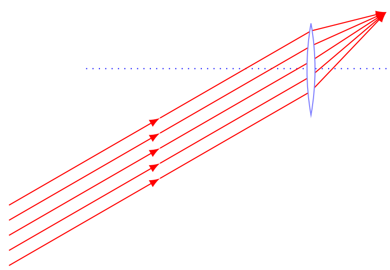
$$= -\frac{f}{\sqrt{3}} \tag{23}$$

$$\approx -1.15cm. \tag{24}$$

O ângulo que a imagem faz com o eixo horizontal é de

$$\tan(\theta) = \frac{|y'|}{q} = \tan(30°) \tag{25}$$

$$\theta = 30°. \tag{26}$$



Questão 4

A lente da figura 2 é formada pela justaposição de uma lente plano-convexa (à esquerda) e outra plano-côncava. A primeira é feita de um vidro com índice de refração $n_1 = 1.6$; a segunda, de vidro com $n_2 = 1.4$. As duas têm raio $R = 4cm$. Encontre a distância focal do conjunto. *Sugestão: imagine que as duas lentes fossem ligeiramente separadas, de forma que as faces planas continuem paralelas e com o mesmo eixo ótico. Imagine, em seguida, que uma fonte de luz é posicionada no foco da lente da esquerda e determine a posição onde será formada a imagem, depois de a luz atravessar as duas lentes.*

Figura 2: Questão 4.

Considere, então, a equação que relaciona o foco, o objeto e a imagem de uma única lente, com raios R_1 e R_2:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \left(\frac{n_1}{n_{ar}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

Para a face plana, fazemos $R_2 \to \infty$. Com o objeto no foco da lente, sua imagem vai para o infinito ($q \to \infty$). Isso simplifica nossa expressão para

$$\frac{1}{p} = (n_1 - 1)\frac{1}{R_1} \tag{29}$$

$$= \frac{0.6}{4cm} \tag{30}$$

$$p = \frac{20}{3}cm. \tag{31}$$

Para a segunda lente, o objeto é a imagem da primeira lente. Assim, $p \to \infty$. Além disso, a face plana tem $R_1 \to \infty$. Embora a curvatura seja a mesma, a face convexa tem raio na direção oposta, ou seja, $R_2 = -R$. Utilizando novamente a equação de lentes gaussianas,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \left(\frac{n_2}{n_{ar}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{32}$$

$$\frac{1}{q} = (n_2 - 1)\,\frac{1}{R} \tag{33}$$

$$= \frac{0.4}{4cm} \tag{34}$$

$$= \frac{1}{10cm} \tag{35}$$

$$q = 10cm. \tag{36}$$

Agora que temos a posição do objeto e da imagem, podemos encontrar o foco do conjunto.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \tag{37}$$

$$= \frac{3}{20cm} + \frac{1}{10cm} \tag{38}$$

$$= \frac{5}{20cm} \tag{39}$$

$$= \frac{1}{4cm} \tag{40}$$

$$f = 4cm. \tag{41}$$

Questão 5

Suponha que, em lugar de duas fendas, Young tivesse trabalhado com três, como mostra a figura 3. Para que ângulos haveria interferência construtiva? Considere duas possibilidades:

- $d_E = d_D$;
- $d_E = 2d_D$.

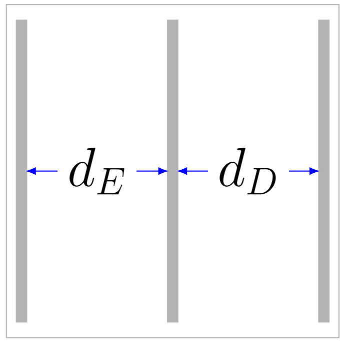


Figura 3: Questão 5.

1. $d_E = d_D = d$;

Considere a expressão para quando temos apenas duas fendas. Lá, sabemos que o máximo acontece quando

$$m\lambda = d\sin(\theta). \tag{42}$$

Veja que, tanto para as fendas da esquerda quanto para as da direita, a equação é válida. Contudo, como não especificamos nenhum limite para os números inteiros que são possíveis alcançar, vemos que com as distâncias iguais os máximos se encontram sempre nos mesmos pontos, vindo do par da esquerda ou da direita. Então, para fendas equidistantes os ângulos de interferência construtiva `são os mesmos` para os primeiros vizinhos.

Contudo, uma possível interferência vem das ondas da fenda da esquerda com a fenda para a direita. Lá, a distância é calculada por

$$m\lambda = 2d\sin(\theta). \tag{43}$$

A única possibilidade para interferência construtiva dessas três fendas nasce então quando temos o mesmo ângulo para as três, que ocorre quando

$$(2m)\lambda = d\sin(\theta). \tag{44}$$

1. $\frac{d_E}{2} = d_D = d$

   Agora, embora as fendas da esquerda sigam a equação

$$m\lambda = 2d\sin(\theta), \tag{45}$$

as fendas da direita ainda seguem

$$m\lambda = d\sin(\theta) \tag{46}$$

$$d\sin(\theta) = m\lambda. \tag{47}$$

Além disso, as interferências causadas pelo conjunto das fendas distantes respeitam

$$m\lambda = 3d\sin(\theta). \tag{48}$$

As três equações só têm o mesmo θ quando respeitam

$$(3m)\lambda = d\sin(\theta). \tag{49}$$

Questão 6

Suponhamos que você queira reproduzir a experiência de Young numa caixa de sapatos que tem $25cm$ de largura e $50cm$ de comprimento. Você vai cortar duas fendas perto do centro de uma das faces mais curtas e lançar luz com comprimento de onda $\lambda = 500nm$ sobre elas. Seu objetivo é mostrar cinco máximos de luz na extremidade oposta da caixa. Qual deve ser a mínima separação d entre as fendas para que isso aconteça?

Podemos usar diretamente que a posição dos máximos é dada por

$$d \sin(\theta) = m\lambda. \tag{50}$$

Uma vez que temos um máximo diretamente à frente das fendas, precisamos de mais 2 máximos de cada lado para totalizar 5. O mínimo de distância corresponde aos máximos mais extremos na quina das paredes da caixa. Nesses pontos,

$$\sin(\theta) = \frac{12.5cm}{\sqrt{(50cm)^2 + (12.5cm)^2}} \approx 0.24.$$

Assim, nos resta utilizar a expressão dos máximos:

$$\begin{align} d \sin(\theta) &= m\lambda \tag{51} \\ 0.24d &= 2 \cdot 500nm \tag{52} \\ d &\approx 4166.67nm \tag{53} \\ &= 4.17\mu m. \tag{54} \end{align}$$

Questão 7

Uma rede de difração tem 500 linhas por milímetro. Se um raio de luz com comprimento de onda $\lambda = 500nm$ incidir normalmente sobre a rede, em que direção (encontre o menor ângulo com a normal) sairá o raio resultante da interferência construtiva?

Se a rede de difração tem 500 linhas por milímetro, a distância entre cada linha é de

$$d = \frac{1mm}{500}.$$

A interferência construtiva ocorre quando

$$\begin{align} m\lambda &= d \sin(\theta) \tag{55} \\ \sin(\theta) &= m500 \cdot 10^{-6}\text{mm} \cdot \frac{500}{1\text{mm}} \tag{56} \\ &= 0.25m, \tag{57} \end{align}$$

onde m é um número inteiro não nulo. Para $m = 1$,

$$\begin{align} \sin(\theta) &= 0.25 \tag{58} \\ \theta &\approx 14.48^\circ. \tag{59} \end{align}$$

Questão 8

Na figura 4, as regiões de cima e de baixo, que têm índice de refração n_1, são muito espessas. Elas são separadas por uma lâmina de espessura d e índice de refração n_2, como indicado. Nesta questão, $n_1 > n_2$. Um feixe de luz com comprimento de onda λ incide normalmente à superfície que separa a região de cima da lâmina. A partir daí ocorrem várias reflexões e refrações no ponto de incidência e imediatamente abaixo dele na superfície entre a lâmina e a região inferior. A figura dá nomes $(A, B, \ldots, H)$ aos raios resultantes de cada reflexão/refração (para maior clareza, os feixes são representados em posições horizontais diferentes, de forma que os raios gerados mais tarde aparecem mais à direita. Assim, o primeiro raio se divide nos raios A e B; ao incidir na superfície inferior, o raio B se divide nos raios C e D; e assim sucessivamente). Encontre a relação entre d e λ para que haja interferência construtiva entre os feixes A e E.

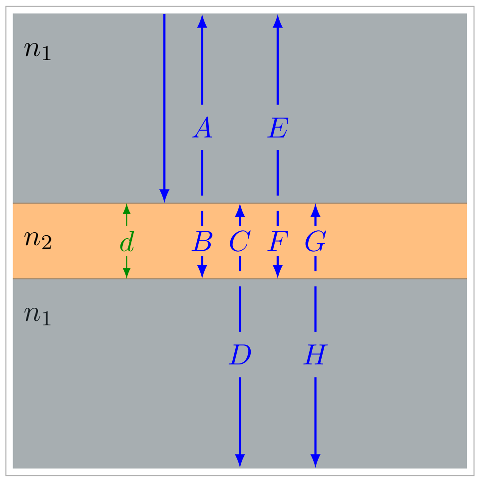


Figura 4: Questões 8-10.

Antes de iniciar a análise, precisamos calcular a relação entre o comprimento de onda interno ao material n_2 e λ.

$$c = n_1 v_1 = n_2 v_2 \tag{60}$$

$$n_1 \lambda \nu = n_2 \lambda_2 \nu \tag{61}$$

$$\lambda n_1 = \lambda_2 n_2 \tag{62}$$

$$\lambda_2 = \frac{n_1}{n_2}\lambda. \tag{63}$$

Sabemos que, quando uma luz incide de um meio com n_1 em um meio com $n_2 > n_1$, não há mudança de fase; caso contrário, ocorre uma adição de fase de π. Essa fase representa meio comprimento de onda, ou seja, $\lambda/2$. A reflexão que gera A não tem alteração de fase. Contudo, a reflexão de B tem. Assim, a luz deve viajar dentro do material um múltiplo inteiro de λ_2 menos (ou mais) a fase de π

(ou seja, subtrair ou somar $\lambda_2/2$ graças à reflexão). Assim,

$$2d = \left(m \pm \frac{1}{2}\right)\lambda_2 \tag{64}$$

$$= \frac{n_1}{n_2}\left(m \pm \frac{1}{2}\right)\lambda \tag{65}$$

$$d = \frac{n_1}{n_2}\left(m \pm \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}. \tag{66}$$

Questão 9

Repita a questão anterior para $n_2 > n_1$.

Embora para $n_2 > n_1$ a adição de fase devida à reflexão surja na reflexão que gera A, o caminho óptico dentro do substrato com n_2 deve ser o mesmo do último exercício.

Questão 10

Ainda no contexto da questão 8, com $n_1 > n_2$, encontre a relação entre d e λ para que haja interferência construtiva entre os raios D e H.

Na geração de D, existe uma fase de π entre C e D. Quando C reflete e se torna F, surge outra fase π. Então, dentro do substrato de n_2, a luz deve percorrer uma distância $(m \pm 1)\lambda$ para que exista interferência construtiva. Assim,

$$d = \frac{n_1}{n_2}(m + 1)\frac{\lambda}{2}. \tag{67}$$

Precisamos ter cuidado com o sinal aqui pois, com $m \in \mathbb{N}^*$, não podemos ter distâncias negativas.