AVLA MECÂNICA 23/11 (1)

SERÁ QUE EXISTE $N \geq 0$ TAL QUE

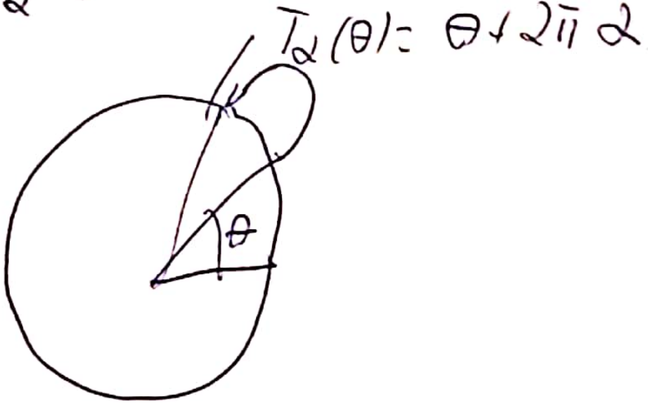
2^N SE ESCREVE COMO

$\underbrace{31415}$, xxxx (ISTO É,

COMEÇA COM 31415 ?

IDÉIA: ESTUDAR ROTAÇÃO IRRACIONAL NO CÍRCULO

$T_\alpha(\theta) = \theta + 2\pi\alpha$ θ É UM ÂNGULO

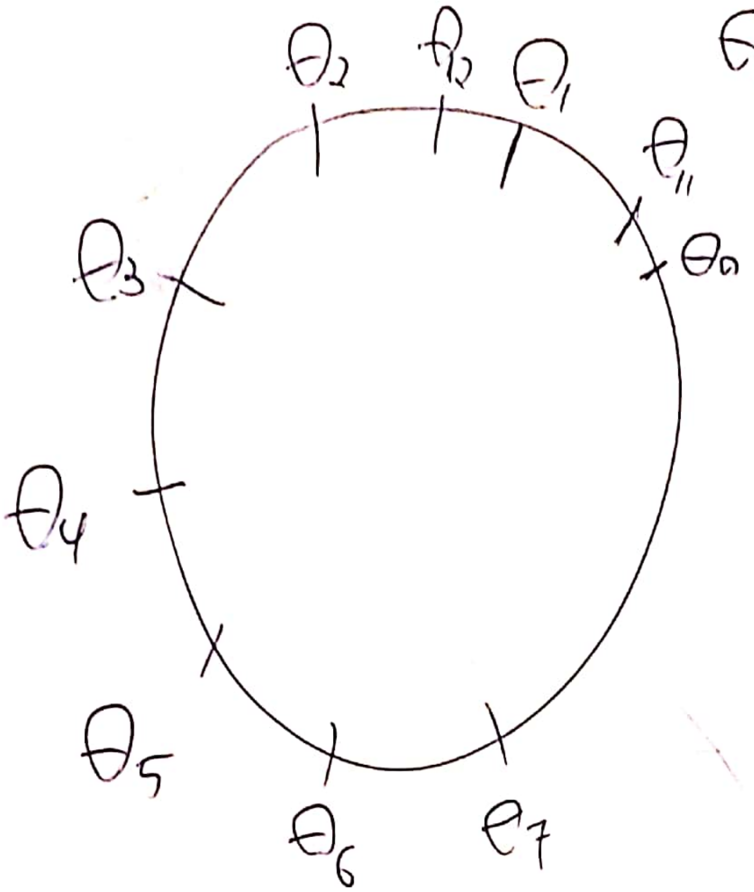


SE $\alpha \notin \mathbb{Q}$, O CONJUNTO

$$\{\theta, \theta+2\pi\alpha, \underset{T_\alpha^2(\theta)}{\theta+4\pi\alpha}, \theta+6\pi\alpha \cdots\}$$

É DENSO

(2)



$\Theta_i = T_\alpha^i(\Theta) =$
$\Theta + i\, 2\pi \cdot \alpha.$

$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\Theta_i\}$

ENTÃO.

PROPOSIÇÃO: $\overline{A} = S^1$

VAMOS OLHAR P/ A SEQUÊNCIA DE VALORES.

$N_i = \cancel{\lfloor \log_{10} 2^i \rfloor}\ 2^i \cancel{/ 10^{\lfloor \log_{10} 2^i \rfloor}}.$

$M_i = \log_{10} N_i = i \log_{10} 2 - \lfloor \log_{10} 2^i \rfloor.$

$i \log_{10} 2 - \lfloor i \log_{10} 2 \rfloor =$

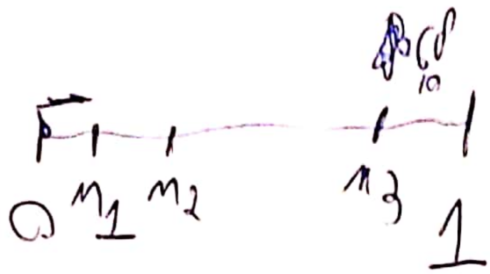
$2^0 = 1 = \quad \log 2^0 = 0 = m_0$ (3)

$m_1 = \log_{10} 2$

$m_2 = 2\log_{10} 2$

$m_3 = 3\log_{10} 2$

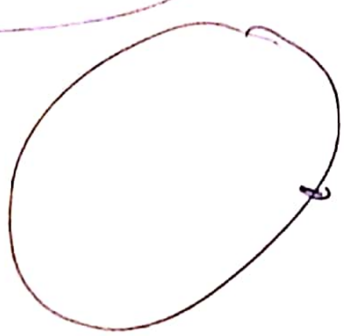
$m_4 = 4\log_{10} 2$



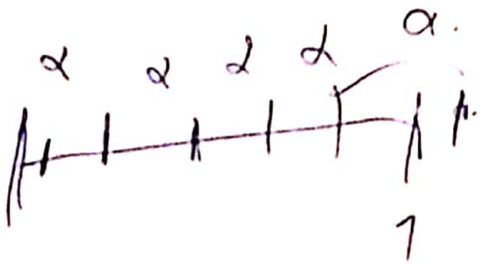
$\alpha = \log_{10} 2$

$m_i = i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor$

$S' = \mathbb{R}$



A SEQUÊNCIA m_i É DENSA.



~~3,4~~ QUANDO UM NÚMERO N COMEÇA COM 3 14...?

$\log_{10} N - \lfloor \log_{10} N \rfloor$

$$\log_{10} 3{,}14 \leq \log_{10} N - \lfloor \log_{10} N \rfloor < \log_{10} 3{,}15$$

$$\Updownarrow$$

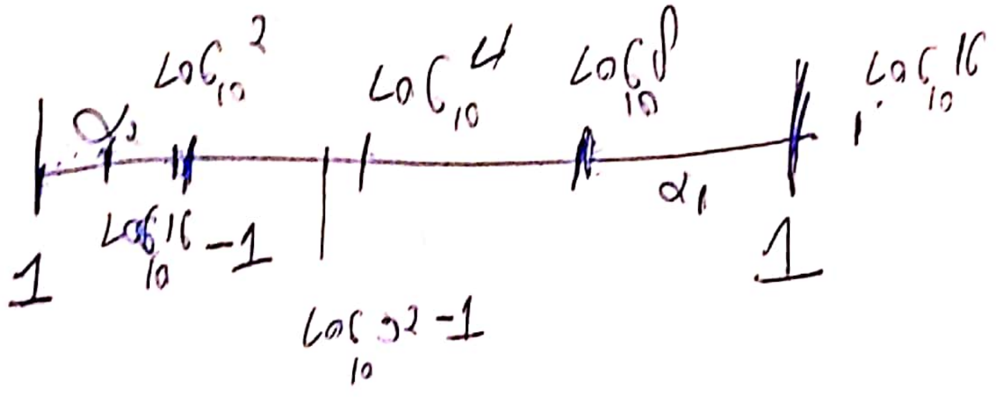
~~2,718 1,83~~

$$3{,}14 \leq N / 10^{\lfloor \log_{10} N \rfloor} \leq 3{,}15$$

$$\Downarrow$$

$$1 \leq N / 10^{\lfloor \log_{10} N \rfloor} < 10$$

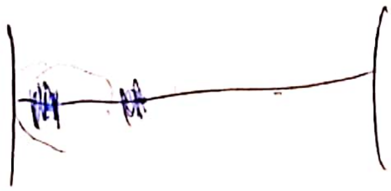
POTENCIAS DE 2.



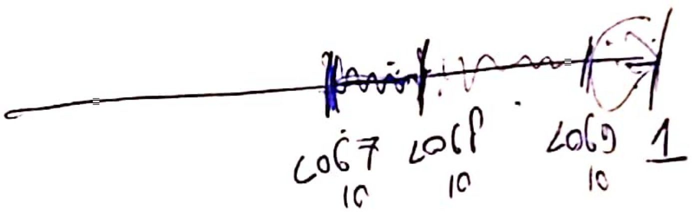
$\cancel{(1 - \log_{10} 8) + [\log_{10} 16 - 1]}$

$$1 - \log_{10} 8 + (\log_{10} 16 - 1) - 1 = \log_{10} 2.$$

COMO $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$
POTÊNCIAS DE 2 PODEM COMEÇAR COM
QUALQUER "PREFIXO".



$$\log_{10} 7 \leq x < \log_{10} 8$$



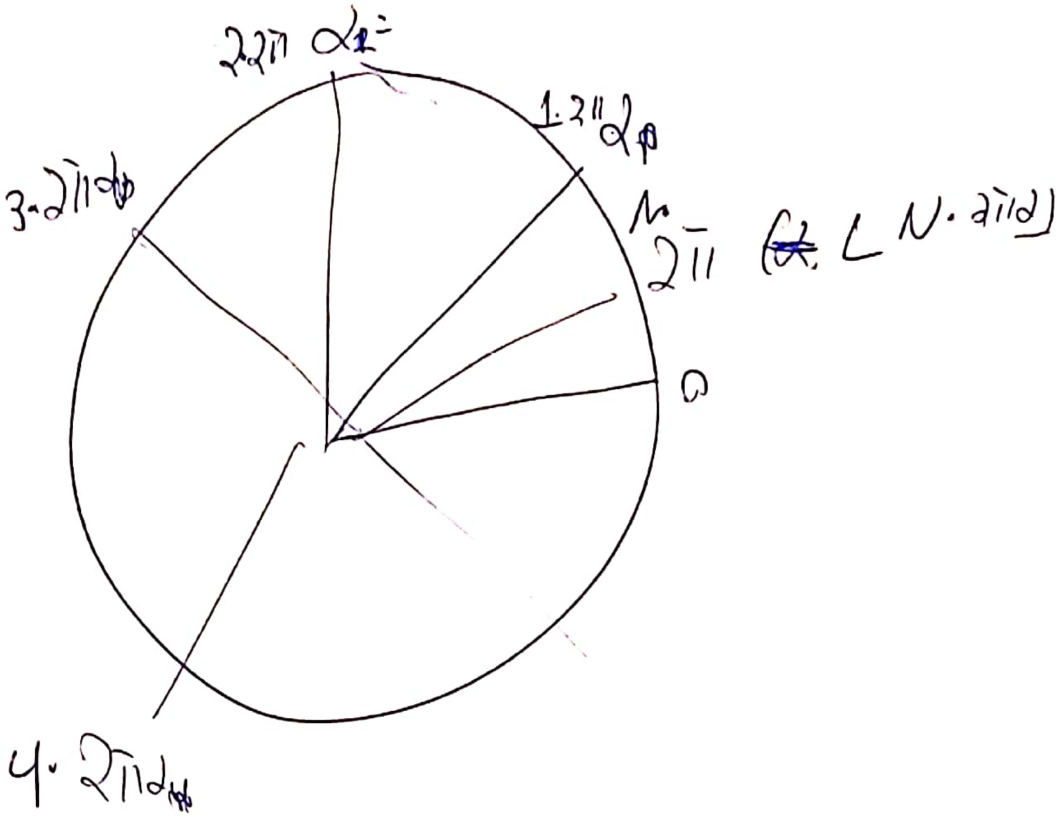
$\log_{10} 8 - \log_{10} 7 = \log_{10} \frac{8}{7}$ É A PROPORÇÃO DE POTÊNCIAS DE 2 QUE COMEÇAM COM 7.

VAMOS MOSTRAR O SEGUINTE RESULTADO.

SE $\alpha \notin \mathbb{Q}$, ENTÃO O CONJUNTO

$$\alpha_i := i \cdot \alpha - \lfloor i \alpha \rfloor$$

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\alpha_i\}$$ É DENSA.



TEOREMA DE RECORRÊNCIA DE POINCARÉ:

SE (X, λ, β) É UM ESPAÇO DE MEDIDA TAL QUE

$\lambda(X) = 1$ E $T: X \circlearrowleft$ ~~É TAL~~ MENSURÁVEL

É TAL QUE $\lambda(T^{-1}(E)) = \lambda(E)$ P/

TODO $E \in \beta$. ENTÃO DADO

A ~~TAL~~ $\in \beta$, ~~com~~ $\lambda(A) > 0$, $\exists$

O CONJUNTO $A_1 = \{x \in A \mid \exists i > 0,\ T^i(x) \in A\}$

$\lambda(A_1) = \lambda(A)$.

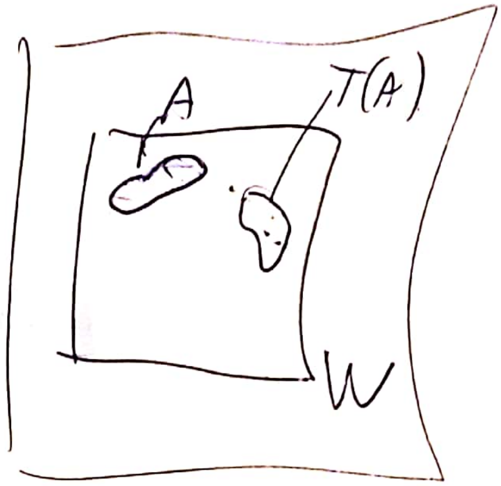
"RELENDO" 7

T BIJ. HOMEOMORFISMO.

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ UMA TRANSFORMAÇÃO, TAL QUE EXISTE W DE VOLUME $\lambda(W)$ FINITO, $T(W) = W$.

E TAL QUE, P/ TODO CONJUNTO $A \subset W$,

$$\lambda(T(A)) = \lambda(A).$$



TEOREMA DIZ QUE,

$\forall A \subset W$ COM VOLUME POSITIVO,

SE $A_0 = \{x \in A, \ \overset{\exists\, j \ge 0}{T^j(x)} \in A\}$

ENTÃO $\lambda(A \setminus A_0) = 0$.

DEM: SEJA ~~A_1~~ ~~$A \setminus A_0$~~ $B = A \setminus A_1$

SUPONHA PRIMEIRO QUE $\lambda(B) > 0$. LOGO.

OS CONJUNTOS $B, T^{-1}(B), T^{-2}(B), \ldots, T^{-N}(B)$ NÃO PODEM SER 2 A 2 DISJUNTOS.

$$\lambda(B) = \lambda(T^{-1}(B)) = \lambda(T^{-2}(B)) \dots$$

SE FOSSEM DISJUNTAS $\lambda\left(\bigcup_{i=0}^{k} T^{-i}(B)\right) = \sum_{i=0}^{k} \lambda(T^{-i}(B)) =$

$$(k+1)\,\lambda(B) > 1$$

SE K FOR SUFICIENTEMENTE GRANDE.

$\Rightarrow \exists\ j_1 < j_2$ TAL QUE

$$T^{-j_1}(B) \cap T^{-j_2}(B) = \phi.$$

$$\Rightarrow B \cap T^{-(j_2-j_1)}(B) \neq \phi.$$

$$\Rightarrow \exists\ x \in B \cap T^{-(j_2-j_1)}(B). \Rightarrow$$

$x \in A$, $T^{(j_2-j_1)}(x) \in A \Rightarrow x \in A$, ABSURDO

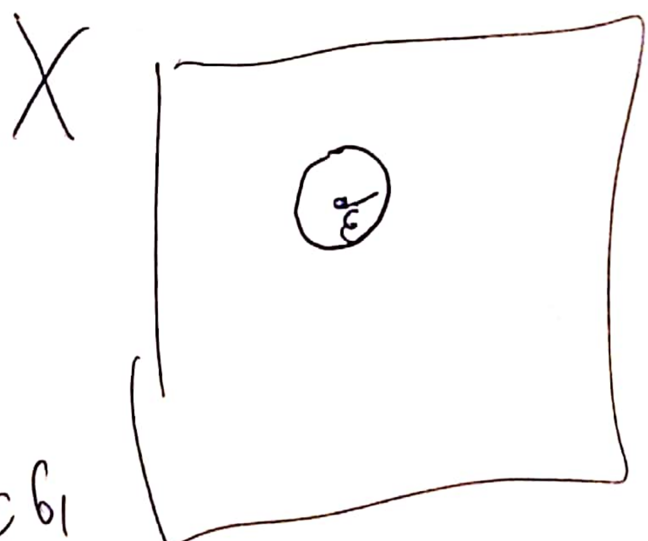
$\Rightarrow \lambda(B) = 0.$

~~TEOREMA DE BAIRE:~~

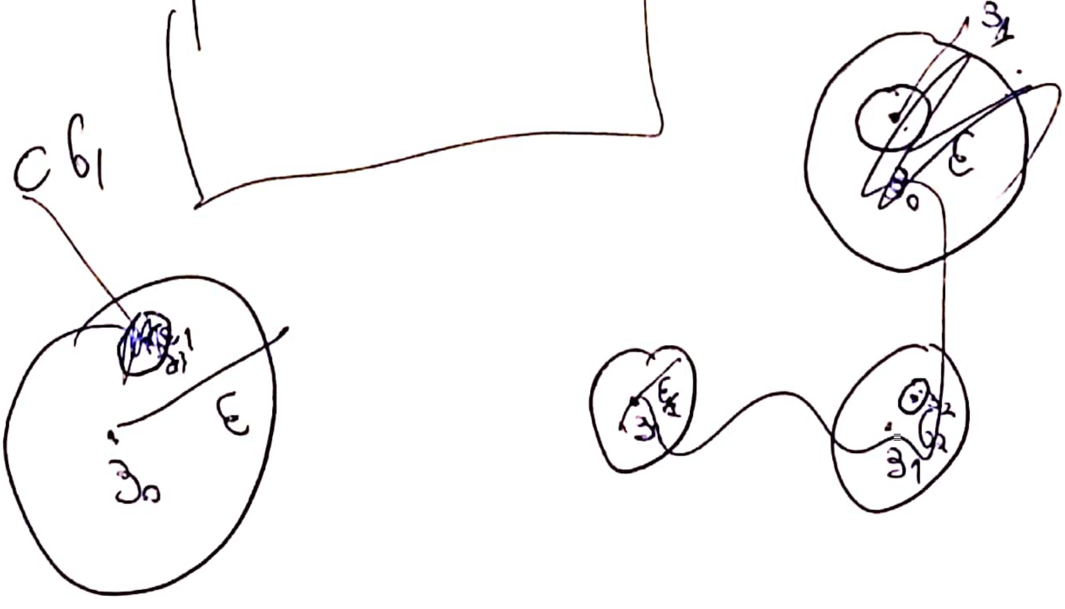
ESPAÇOS DE BAIRE:

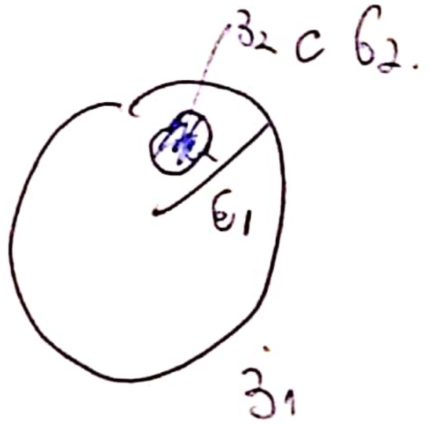
(X, τ) ESPAÇO TOPOLÓGICO É DITO DE BAIRE SE, $\forall (G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ SEQUÊNCIA DE ABERTOS DENSOS DE X, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i$ É DENSA.

EXEMPLO DISSO: ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS.



G_i ABERTOS DENSOS
SUPONHA POR ABSURDO
$\bigcap G_i$ NÃO É DENSA





$$\exists\ B_{\varepsilon_2}(z_2) \subset B_{\frac{\varepsilon_1}{2}}(z_1)$$

$$\text{e } B_{\varepsilon_2}(z_2) \subset G_2.$$

~~$L = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \exists \frac{p}{q}$~~

$q \geq 2$

$$L_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^N} \right\}.$$

L_N É ABERTO

L_N É DENSO.

$L = \bigcap_{N>0} L_N \Rightarrow L$ É UM CONJUNTO GENÉRICO.

11

$\lambda\left(\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^N}, \frac{p}{q}+\frac{1}{q^N}\right)\right)$ MAS

$$\lambda(L_N \cap [0,1]) \leq \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{q} \frac{2}{q^N} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{2}{q^{N-1}}$$

$$\lambda(L_N \cap [0,1]) \xrightarrow{N \to +\infty} 0$$

$$\lambda(L \cap [0,1]) = 0.$$

TEOREMA TOPOLÓGICO DE RECORRÊNCIA DE POINCARÉ.

~~TM: $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ ESPAÇO TOPOLÓGICO DE MEDIDA $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ BORELIANOS.~~

~~E $\lambda(\theta) > 0$, $\forall \theta$ ABERTO.~~

~~$\lambda(X) = 1$~~

· VAMOS ASSUMIR QUE

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ HOMEOMORFISMO, TAL QUE,

PARA TODO CONJUNTO MENSURÁVEL A,

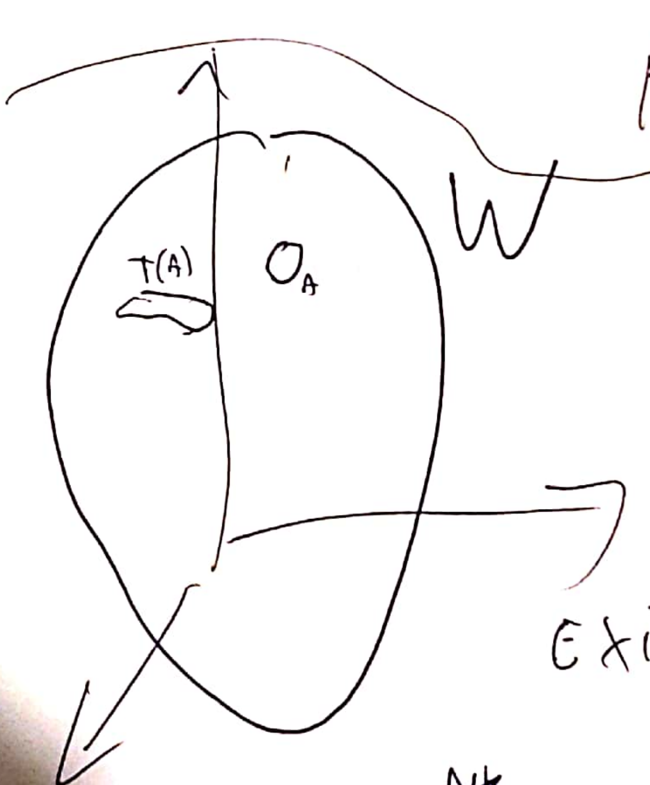
$$\lambda(T(A)) = \lambda(A).$$ E

EXISTE $W \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda(W) < +\infty$.

W ABERTO E

TAL QUE $T(W) = W$.

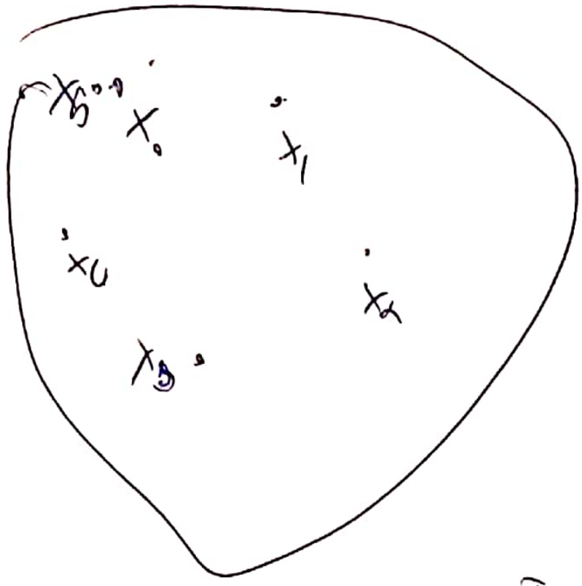
W LIMITADO



DIZEMOS QUE UM PONTO $X \in \mathbb{R}^n$ É "RECORRENTE" SE:

EXISTE $N_K \to +\infty$. TAL QUE

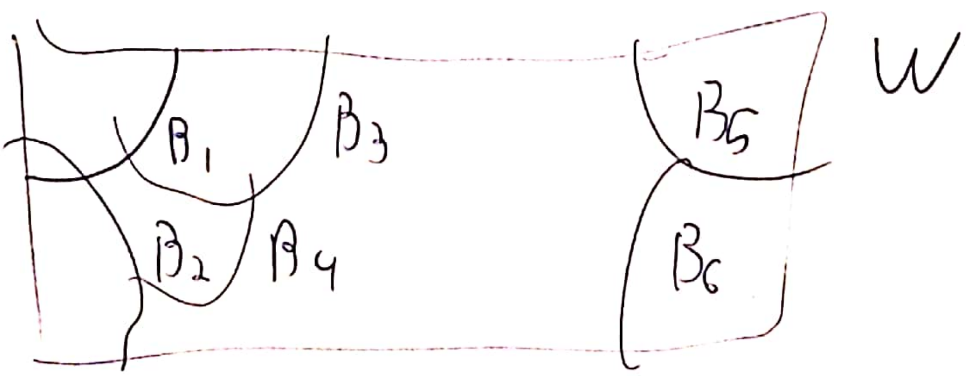
$$T^{N_K}(X) \to X.$$



ENTÃO O CONJUNTO DE PONTOS RECORRENTES DE W É UMA INTERSEÇÃO DE ABERTOS DENSOS EM W.

DEM:
DADO $\varepsilon > 0$. CUBRO W COM UMA UNIÃO FINITA DE BOLAS DE RAIO $\frac{\varepsilon}{2}$.

$$W \subset \underbrace{\left(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_N \right)}_{\bigcup_{i=1}^{N} B_i^{\varepsilon}}.$$



CONSIDERE

$A_i = B_i \cap W$. $C_i =$

TEMOS QUE O CONJUNTO DOS PONTOS DE $B_i \cap W$

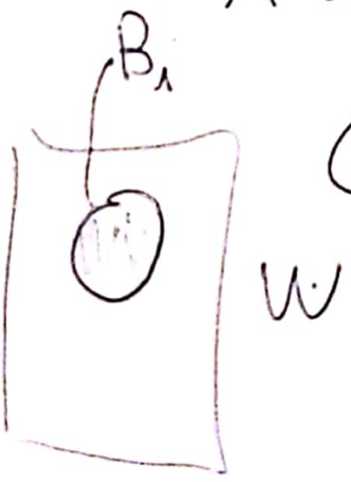
QUE RETORNA A $\boxed{B_i \cap W \text{ É ABERTO}}$

$\Rightarrow z \in B_i \cap W$, $T^N(z) \in B_i \cap W$

~~$B_i \cap W$ É DENSA EM~~

POI E C_i É DENSO EM $B_i \cap W$.

$$\lambda(B_i \cap W \setminus C_i) = \lambda(B_i \setminus W).$$



$$C^{\varepsilon} = \left(\bigcup C_i\right).$$ É DENSA EM W. E É ABERTA.

SE $x \in C^{\varepsilon}$, $\exists N > 0$, $d(T^N(x), x) < \varepsilon$.

SEJA $C = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} C^{\frac{1}{N}}$ $\varepsilon_0 = 1$ $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ $\varepsilon_2 = \frac{1}{3}$ $\varepsilon_3 = \frac{1}{4}$

$C^{\frac{1}{2}}$ É UM CONJUNTO ABERTO E DENSO DE PONTOS DE W

TAL QUE, SE $x \in C^{\frac{1}{2}}$, $\exists N_2 > 0$,

$$d(T^{N_2}(x), x) < \frac{1}{2}.$$

$C^{\frac{1}{3}}$ ... $d(T^{N_3}(x), x) < \frac{1}{3}.$

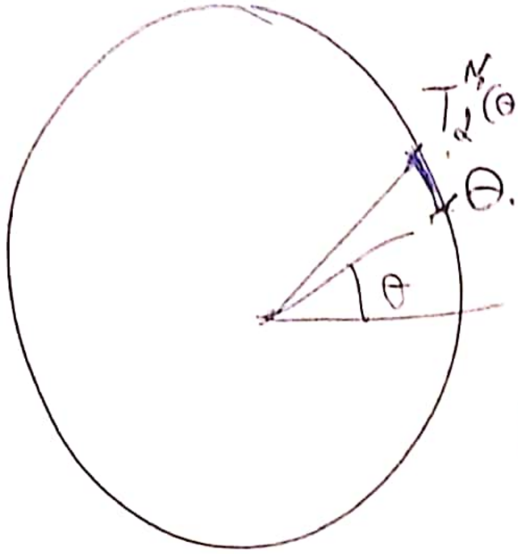
$$C = \bigcap_{i=2}^{+\infty} C^{\frac{1}{i}}.$$

C É A INTERSEÇÃO DE ABERTOS DENSOS EM W.

SE $x \in C$, x É RECORRENTE

$\forall \varepsilon_0 > 0$

$T_\alpha^N(\theta) = \theta + N \cdot 2\pi\alpha$



$\exists N_0 > 0$ TAL QUE

$$d\left(T_\alpha^{N_0}(0), 0\right) < \varepsilon_0$$