Gabarito - T4

FQ: $2xy - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 4 \longrightarrow 2xy - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 4 = 0$

$C = 2 \longrightarrow \exists$ Rotação

$D, E \neq 0 \longrightarrow \exists$ Translação

1º Passo: Escrever a FQ matricialmente

$$[x\ y]\begin{bmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [D\ \ E]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

$$[x\ y]\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-2\sqrt{2}\ \ 2\sqrt{2}]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 4 = 0$$

$A = [T]_C$ ... matriz do OL que descreve a rotação

2º Passo: Classificar a cônica (produto dos autovalores)

Autovalores: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 < \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$

$\lambda_1 * \lambda_2 = -1 < 0 \therefore$ Hipérbole ou par de retas concorrentes

3º Passo: Diagonalizar a matriz A

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$$ ... matriz do OL na base de autovetores

Autovetores: $(A - \lambda_i I)\vec{v_i} = \vec{0}$, $\vec{v_i} = (x, y)$

$\lambda_1 = 1$: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow -x + y = 0 \therefore y = x$

$\vec{v_1} = x(1, 1)$, $x \neq 0$

$\lambda_2 = -1$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x + y = 0 \therefore y = -x$

$$\vec{v_2} = x(1,-1),\ x \neq 0$$

$B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ é uma base obtida a partir da rotação da base canônica ortonormal, portanto, seus vetores devem ser unitários:

para $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\vec{v_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\vec{v_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

4º Passo: Escrever as coord do sistema auxiliar Ox_1y_1

$$P = [I]_C^B = \left[(\vec{v_1})_C \ \ (\vec{v_2})_C\right] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

* $[x \ \ y] = [x_1 \ \ y_1]\, P^T = [x_1 \ \ y_1]\, P^{-1}$

* $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

5º Passo: Reescrever a FQ em termos dos vetores da base B (sistema Ox_1y_1)

$$[x_1 \ \ y_1] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [D \ \ E]\, P \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + F = 0$$

$$[x_1 \ \ y_1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + [-2\sqrt{2} \ \ 2\sqrt{2}] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 4 = 0$$

$$x_1^2 - y_1^2 + 4y_1 - 4 = 0$$

6° Passo: Escrever as coord no sistema auxiliar $O'x_2y_2$

$$x_1^2 - (y_1^2 - 4y_1 + 4) - 4 = -4$$

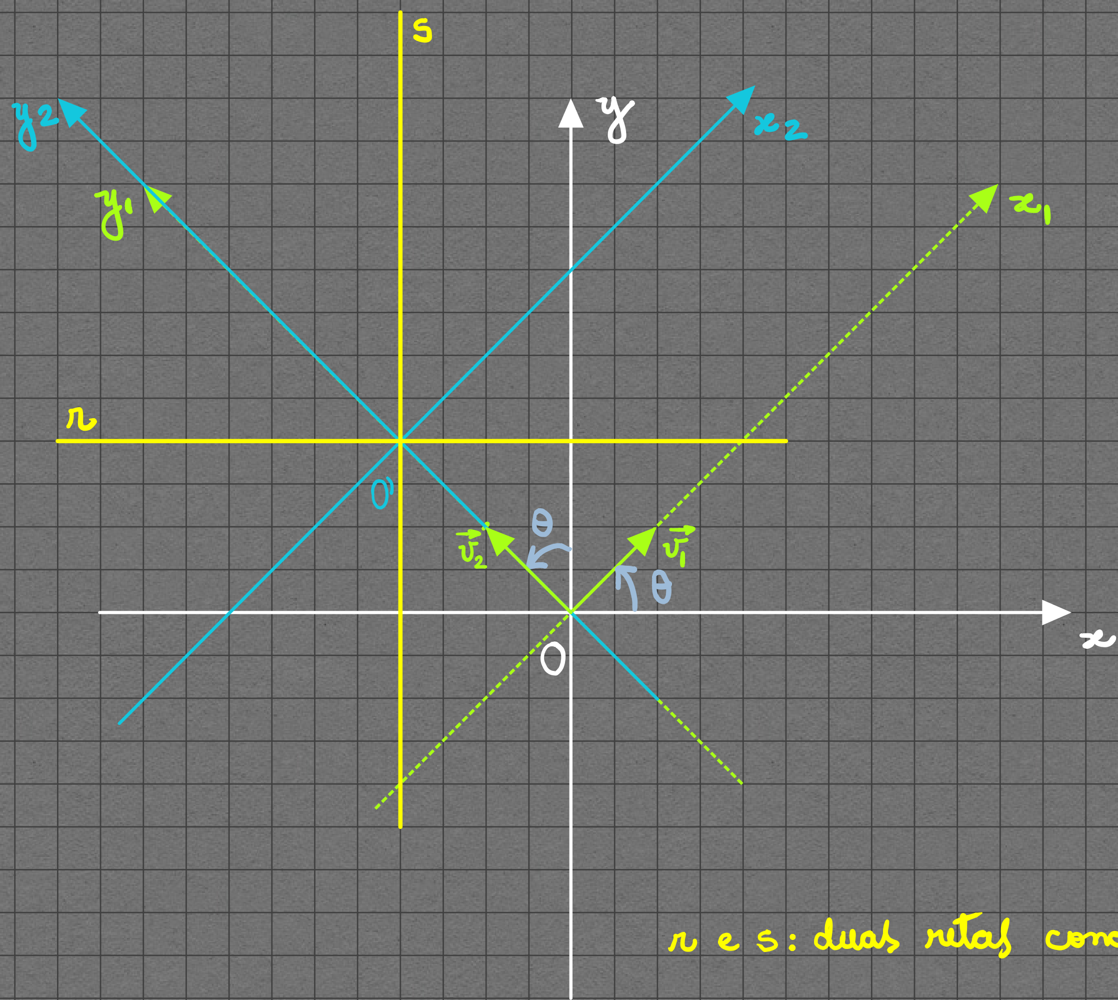
$$x_1^2 - (y_1 - 2)^2 = 0$$

Então:

$$x_2^2 - y_2^2 = 0$$

$\therefore x_2 = \pm y_2 \longrightarrow$ 2 retas concorrentes em $O'(0,2)$

ESBOÇO:



r e s: duas retas concorrentes