UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos

ZAB1111 – ESTATÍSTICA BÁSICA

Prof. César Gonçalves de Lima   cegdlima@usp.br

Aula 15 – TESTE DE HIPÓTESE PARA A MÉDIA POPULACIONAL

4. TESTES DE HIPÓTESES

Problema: Executar testes de hipóteses sobre o valor de parâmetros de interesse de uma população de estudo.

- Se **conhecemos todos os elementos da população** (pouco provável…), também conhecemos o verdadeiro valor de um particular parâmetro de interesse e não precisaremos estimá-lo nem testar hipóteses sobre o seu valor.

- Na maioria das vezes temos acesso a uma **amostra pequena** da população e as nossas conclusões deverão ser baseadas em resultados obtidos nesta amostra.

Teste de hipóteses: ferramenta estatística que permite validar ou rejeitar uma hipótese feita sobre algum parâmetro de interesse, com base em resultados obtidos em uma amostra.

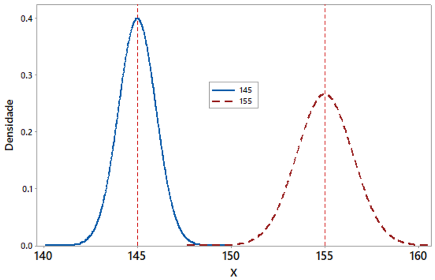
Exemplo 4.1. Um leilão de bezerros Nelore procedentes de duas grandes fazendas (FAZ-1 e FAZ-2) está sendo realizado. Os animais dessas duas fazendas apresentam as seguintes características:

Fazenda	Peso médio (μ)	Desvio padrão (σ)
FAZ-1	145 kg	12 kg
FAZ-2	155 kg	20 kg

Um lote de animais de procedência ignorada vai para leilão e um comprador leigo, precisa saber a procedência dos animais para fazer ou não uma oferta, pois pretende comprar animais da FAZ-2.

O edital do leiloeiro informa que pouco antes do início do evento será divulgado o peso médio ($\bar{x}$) de uma amostra de 25 animais que vão para leilão.

Com base neste valor, que **regra de decisão** o comprador deve usar para saber se o lote de animais que vai para leilão é da FAZ-2?



Sugestão

Decidir que os animais são da FAZ-2 se $\bar{x}$ estiver mais próximo de 155 kg e que são da FAZ-1 se $\bar{x}$ estiver mais próximo de 145 kg.

Podemos definir a seguinte regra de decisão:

Se $\bar{x} < 150$ concluir que os animais são da FAZ-1.

Se $\bar{x} \geq 150$ concluir que os animais são da FAZ-2.

Algumas dúvidas sobre esta regra de decisão:

- Será que o comprador pode estar enganado quanto à procedência dos animais?
- É possível que o peso médio de um lote de 25 animais da FAZ-2 seja igual ou inferior a 148 kg?
- É possível que o peso médio de um lote de 25 animais da FAZ-1 seja superior a 150 kg?

Existem dois tipos de erro que o comprador pode cometer ao tomar uma decisão com base em uma regra pré-fixada, numerando-os para facilitar a linguagem:

- **Erro tipo I**: concluir que os animais são da FAZ-1 quando na verdade são da FAZ-2.

  Isto acontece quando uma amostra de animais da FAZ-2 apresenta uma média $\bar{x} < 150$.

- **Erro tipo II**: concluir que os animais são da FAZ-2 quando na verdade são da FAZ-1.

  Isto acontece quando uma amostra de animais da FAZ-1 apresenta uma média $\bar{x} \geq 150$.

Podemos calcular a probabilidade de ocorrência desses dois tipos de erros, mas antes, precisamos definir duas hipóteses de interesse: a hipótese de nulidade (H_0) e a hipótese alternativa (H_a):

H_0: os animais são da FAZ-2

ou H_0: X ~ $N(\mu_2$ = 155kg, σ_2 = 20 kg)

H_a: os animais são da FAZ-1

ou H_a: X ~ $N(\mu_1$ = 145kg; σ_1 = 12 kg)

De uma forma mais simplificada podemos escrever:

H_0: μ = 155 (σ = 20 kg)

H_a: μ = 145 (σ = 12 kg)

Chamaremos de **Região Crítica** (RC) a "região formada pelos valores que nos levam a rejeitar a hipótese H_0".

Baseado na regra de decisão adotada a região crítica será:

$$\text{RC} = \{\bar{x} \in \text{R}: \bar{x} < 150\}$$

Então:

$$P(Erro\ tipo\ I) = P(\bar{x} \in \text{RC} \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$$

$$P(Erro\ tipo\ II) = P(\bar{x} \notin \text{RC} \mid H_a \text{ é verdadeira}) = \beta$$

No exemplo, admitindo que o peso dos bezerros Nelore tenha distribuição normal, a probabilidade de cometer o erro do tipo I é igual a:

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P[\bar{x} < 150 \mid \bar{x} \sim N(155{,}16)]$$

$$= P\left\{ Z < \frac{(150-155)}{\sqrt{16}} \right\} = P(\text{Z} < -1{,}25) = 0{,}1056$$

Já a probabilidade de se cometer o erro do tipo II é igual a:

$$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P[\bar{x} \geq 150 \mid \bar{x} \sim N(145; 5{,}76)]$$

$$= P\left\{Z \geq \frac{(150-145)}{\sqrt{5{,}76}}\right\} = P(Z \geq 2{,}08) = 0{,}0188$$

Resumindo:

Decisão	Origem dos animais	
	FAZ-1	FAZ-2
São da FAZ-1	Sem erro	α = 10,6%
São da FAZ-2	β = 1,9%	Sem erro

O comprador leigo cometerá o Erro tipo I com maior probabilidade (10,6%) que o Erro tipo II (β = 1,9%).

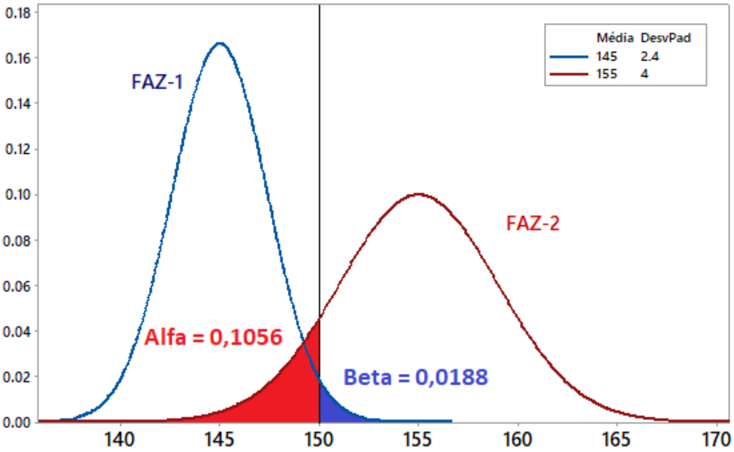


Figura 1. Probabilidades de cometer Erros tipo I e II relacionadas com a regra de decisão adotada

PROCEDIMENTO USUAL PARA REALIZAR UM TESTE DE HIPÓTESE

É mais comum fixarmos um valor para α = $P(Erro\ tipo\ I)$, chamado **nível de significância do teste**, e encontrarmos a regra de decisão correspondente.

Por exemplo, fixando-se α = 5% (o que é <u>bastante comum</u>!) temos:

$$\alpha = 0{,}05 = P[\bar{x} < \bar{x}_c \mid \bar{x} \sim N(155{,}16)] = P(Z < -1{,}645)$$

$$-1{,}645 = \frac{\bar{x}_C - 155}{\sqrt{16}} \Rightarrow \bar{x}_c = 148{,}42\text{kg}$$

Neste caso, a região crítica fica:

$$RC(5\%) = \{\bar{x}_c < 148{,}42\}$$

A regra de decisão associada a esta $RC(5\%)$ pode ser escrita como:

Se $\bar{x} < 148{,}42$ kg conclua que os animais são da FAZ-1

Se $\bar{x} \geq 148{,}42$ kg, conclua que os animais são da FAZ-2

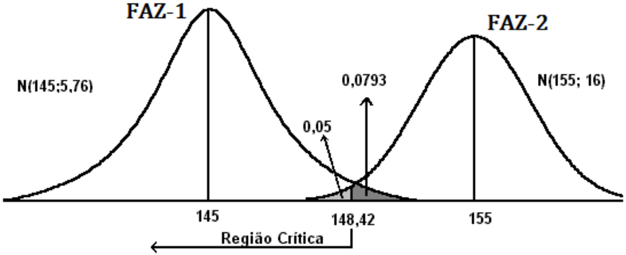


Figura 9. Probabilidades de cometer os erros dos tipos I e II num teste de hipótese

Note que para esta $RC(5\%)$ temos:

$$\beta = P(Erro\ do\ tipo\ II) = P[\bar{x} \geq 148{,}42;\ \bar{x} \sim \mathrm{N}(145;\ 5{,}76)]$$

$$= P(\mathrm{Z} \geq 1{,}425) = 0{,}0771$$

Em relação ao mecanismo dos erros, vale observar que:

i) Os tamanhos dos erros tipo I e II dependem exclusivamente da regra de decisão adotada.

ii) Adotando outros limites na regra de decisão

Se escolhermos $\bar{x}$ inferior a 150: $\alpha \downarrow$ e $\beta \uparrow$

Se escolhermos $\bar{x}$ superior a 150: $\beta \downarrow$ e $\alpha \uparrow$

iii) $\alpha \downarrow$ e $\beta \downarrow$ simultaneamente, somente se aumentarmos o tamanho da amostra usada no teste.

De um modo geral os erros envolvidos num teste de hipótese podem ser descritos como:

- Erro tipo I: consiste em rejeitar H_0 quando ela é verdadeira
- Erro tipo II: consiste em aceitar H_0 quando ela é falsa.

Na prática a hipótese da nulidade (H_0) é sempre escrita como uma igualdade e a hipótese alternativa (H_a) como uma desigualdade.

A especificação da hipótese alternativa (H_a) depende do grau de informação que se tem sobre o problema.

Situação 1. Suponhamos que os animais possam vir da FAZ-2 e de outras fazendas, cujos animais apresentam um peso médio inferior a 155 kg e que o interesse do comprador é por animais da FAZ-2.

Neste caso, só iremos desconfiar que os animais não são da FAZ-2 se o peso médio dos animais for bem inferior a 155 kg. Neste caso as hipóteses a serem testadas podem ser definidas como:

$$\begin{cases} H_0\text{: os animais são da FAZ} - 2 \\ H_a\text{: os animais não são da FAZ} - 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0\text{: } \mu = 155\ kg \\ H_a\text{: } \mu < 155\ kg \end{cases}$$

Neste caso a regra de decisão deve ser **unilateral à esquerda** e pode escrita como:

Se $\bar{x} < \bar{x}_c$ concluir que os animais não são da FAZ-2.
Se $\bar{x} \geq \bar{x}_c$ concluir que os animais são da FAZ-2.

Se no Exemplo 4.1 fixarmos α = 5% teremos:

$$0{,}05 = P(\bar{x} < \bar{x}_c \mid \bar{x} \sim \mathrm{N}(155;\, 16) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < z_c)$$

$$\Rightarrow z_c = -1{,}65 \Rightarrow -1{,}65 = \frac{\bar{x}_c - 155}{\sqrt{16}}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_c = 148{,}40 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow RC(5\%) = \{\bar{x} \in \mathrm{R}\colon \bar{x} < 148{,}40\}$$

Concluiremos que os animais são da FAZ-2, ao nível de significância de 5%, quando $\bar{x} \geq 148{,}40$kg.

Situação 2. Suponhamos agora que não exista razão para o comprador acreditar que os animais da FAZ-2 sejam os melhores, mas o comprador continua interessado nos animais desta fazenda.

Neste caso, somente iremos desconfiar que os animais não sejam da FAZ-2, quando o peso médio deles for muito diferente (muito inferior ou muito superior) de 155 kg. As hipóteses são escritas como:

$$\begin{cases} H_0\text{: os animais são da FAZ} - 2 \\ H_a\text{: os animais não são da FAZ} - 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0\text{: } \mu \; = \; 155 \text{ kg} \\ H_a\text{: } \mu \; \neq \; 155 \text{ kg} \end{cases}$$

A regra de decisão associada a essas hipóteses deve ser bilateral e pode ser escrita como:

Se $\bar{x} < \bar{x}_{c_1}$ ou $\bar{x} > \bar{x}_{c_2}$ concluímos que os animais não são da FAZ-2.
Se $\bar{x}_{c_1} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_{c_2}$ concluímos que os animais são da FAZ-2.

Fixando α = 5%, daremos preferência aos valores críticos simétricos em relação à média $\bar{x}$. Então:

$$0{,}05 = P(\bar{x} < \bar{x}_{c_1} \text{ ou } \bar{x} > \bar{x}_{c_2} \mid \bar{x} \sim N(155{,}16)$$

$$= P(Z < -1{,}96) + P(Z > 1{,}96)$$

$$\Rightarrow z_{c_1} = -1{,}96 \text{ e } z_{c_2} = 1{,}96$$

Então:

$$-1{,}96 = \frac{\bar{x}_{c_1} - 155}{\sqrt{16}} \Rightarrow \bar{x}_{c_1} = 147{,}16\text{kg}$$

$$1{,}96 = \frac{\bar{x}_{c_2} - 155}{\sqrt{16}} \Rightarrow \bar{x}_{c_2} = 162{,}84\text{kg}$$

Neste caso a região crítica fica:

$$RC(5\%) = \{\bar{x} \in \mathrm{R} \mid \bar{x} < 147{,}16 \text{ ou } \bar{x} > 162{,}84\}$$

Só concluiremos que os animais são da FAZ-2, ao nível de significância $\alpha = 5\%$, quando o peso médio amostral $\bar{x} \in [147{,}16;\ 162{,}84]$ kg.

Resumindo: A escolha do sinal da desigualdade que aparece na hipótese alternativa (H_a) depende das informações apresentadas no problema ou da pergunta formulada na pesquisa.

Exemplo: Certo fazendeiro afirma que a média de produção de leite das suas vacas é superior a 30 kg/dia. Para confirmar ou não essa afirmação vamos pegar uma amostra de suas vacas e testar:

$$H_0: \mu = 30$$

$$H_a: \mu > 30 \qquad \text{(afirmação do fazendeiro)}$$

4.1. PROCEDIMENTOS BÁSICOS PARA A CONSTRUÇÃO DE UM TESTE DE HIPÓTESE

Os procedimentos básicos para a construção de um teste de hipótese sobre o valor de um parâmetro genérico, θ, são:

i) Fixe a hipótese que será colocada à prova, H_0: $\theta = \theta_0$ (hipótese da nulidade) e escolha uma hipótese alternativa (H_a), que sempre incluirá uma desigualdade e será considerada verdadeira quando H_0 for rejeitada:

H_a: $\theta \neq \theta_0$	hipótese bilateral ou bicaudal
H_a: $\theta > \theta_0$	hipótese unilateral à direita
H_a: $\theta < \theta_0$	hipótese unilateral à esquerda.

$ii)$ Use a teoria estatística para decidir qual estimador (estatística) de θ será usada para julgar H_0. Por exemplo, se o parâmetro em estudo for a média μ, iremos usar o estimador $\bar{x}$; se for a probabilidade p, usaremos o estimador $\hat{p}$.

$iii)$ Fixe $\alpha = P(\text{Erro tipo I})$ e construa a região crítica $RC(\alpha)$ do teste. Note que a $RC(\alpha)$ terá o mesmo sinal da desigualdade que aparece em H_a.

$iv)$ Use as informações fornecidas pela amostra, para encontrar o valor da estatística $\hat{\theta}$ que definirá a decisão.

$v)$ Se $\hat{\theta} \in RC(\alpha)$ rejeite a hipótese H_0 ao nível de significância α e aceite a hipótese alternativa, H_a, como verdadeira.

Se $\hat{\theta} \notin RC(\alpha)$ aceite a hipótese H_0 como verdadeira.

Notas:

- Na maioria dos testes a hipótese alternativa H_a não especifica um único valor alternativo para a média μ, o que dificulta (praticamente impossibilita!) o cálculo de $\beta = P(\text{Erro tipo II})$.
- É muito comum usar nos testes de hipóteses o nível de significância α = 0,05 = 5%.

4.2. TESTE PARA A MÉDIA DE UMA POPULAÇÃO NORMAL QUANDO A VARIÂNCIA DA POPULAÇÃO É CONHECIDA

As hipóteses testadas neste caso podem ser escritas como:

H_0: $\mu = \mu_0$

H_a: $\mu \neq \mu_0$ ou H_a: $\mu > \mu_0$, ou H_a: $\mu < \mu_0$

onde μ_0 é um valor fixado pelo pesquisador.

A estatística do teste será $\bar{x}$, que tem distribuição $N(\mu_0, \sigma^2/n)$, o que implica em:

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0; 1) \tag{21}$$

Vamos resolver um exemplo típico de teste de hipótese para a média quando a variância populacional (σ^2) é conhecida.

Exemplo 4.2 O peso ao desmame de bezerros Nelore do Campus tem um desvio padrão $\sigma = 12$kg. Com o objetivo de testar a afirmação do zootecnista do Campus que o peso médio dos bezerros é 220 kg, sorteou-se uma amostra de 80 animais obtendo-se $\bar{x}$ = 216 kg. Podemos confirmar a afirmação feita, ao nível de significância de 5%?

Resolução:

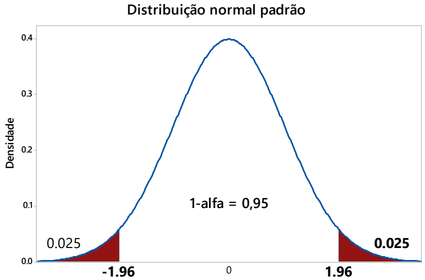
- X = "peso ao desmame de bezerros Nelore",

  $\Rightarrow$ X $\sim N(220, 144)$, ou seja, $\mu_X = 220$ e $\sigma_X^2 = (12)^2 = 144$

- Hipóteses a serem testadas:

  H_0: μ = 220 (o peso médio ao desmame é 220 kg)
  H_a: $\mu \neq 220$ (o peso médio ao desmame não é 220 kg)

- Estatística do teste, $\bar{x} \sim N(220;\, 144/80)$, ou $\bar{x} \sim N(220;\, 1{,}80)$
- Da tabela da distribuição normal padrão nós temos que:



$$-1{,}96 = \frac{\bar{x}_{c_1} - 220}{\sqrt{1{,}80}} \Rightarrow \bar{x}_{c_1} = 217{,}37\text{kg}$$

$$1{,}96 = \frac{\bar{x}_{c_2} - 220}{\sqrt{1{,}80}} \Rightarrow \bar{x}_{c_2} = 222{,}63\text{kg}$$

$$\Rightarrow \; RC(5\%) = \{\bar{x} \in \mathrm{R}\text{: } \bar{x} < 217{,}37 \text{ ou } \bar{x} > 222{,}63\}$$

Note que a $RC(5\%)$ é formada por valores extremos, distantes de $\mu = 220$.

- Como a média amostral, $\bar{x}$ = 216 kg $\in RC(5\%)$, rejeitamos a hipótese H_0 (α = 5%) e concluímos que o peso médio ao desmame dos bezerros Nelore **não é igual** a 220 kg, ou seja, o zootecnista do Campus fez uma afirmação equivocada.

Procedimento alternativo mais simples para realizar o teste:

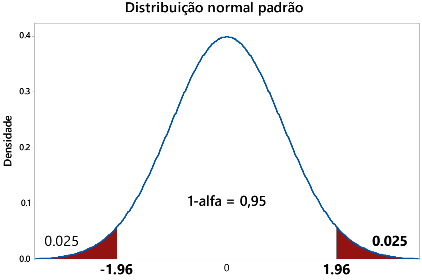
1) Escrever a RC em função da variável padronizada, Z.
2) Calcular o valor z_{calc} padronizando a média amostral, $\bar{x}$
3) Verificar se z_{calc} pertence ou não RC e concluir sobre a rejeição ou não de H_0.

No Exemplo 4.2 teríamos:

$$RC(5\%) = \{z \in \text{R}: |z| > 1{,}96\}$$

Padronizando a média amostral, $\bar{x}$, teremos:

$$z_{calc} = \frac{216-220}{\sqrt{1{,}80}} = -2{,}98$$



Como $z_{calc} = -2{,}98 \in RC(5\%)$ concluímos (mais uma vez!) que a hipótese H_0 deve ser rejeitada ao nível de 5% de significância e que podemos concluir que a afirmação do Zootecnista foi equivocada.

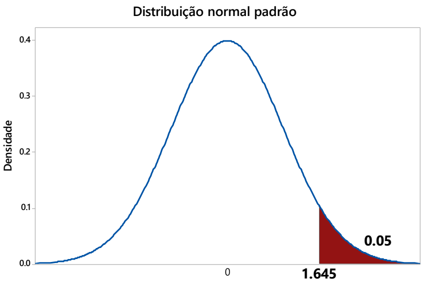
Exemplo 4.3. Sabe-se através de pesquisas, que o desvio padrão da produção leiteira de certa raça, no Brasil, é σ = 2,3 kg/vaca/dia. Desejando-se testar a afirmação que a produção média do rebanho leiteiro de certo pecuarista é superior a 6,0 kg/vaca/dia, sorteou-se uma amostra de 36 vacas, obtendo-se $\bar{x}$ = 6,7 kg/vaca/dia. Com base nesses resultados, teste a afirmação do pecuarista usando α = 5% e α = 1%.

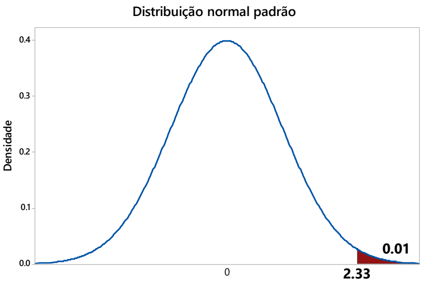
Resolução:

H_0: μ = 6,0

H_a: μ > 6,0 (afirmação do pecuarista)

Da amostra temos que $\bar{x} = 6{,}7 \Rightarrow z_{calc} = \frac{6{,}7 - 6{,}0}{2{,}3/\sqrt{36}} = 1{,}83$





$RC(5\%) = \{z \in \mathrm{R}: z > 1{,}65\}$ $\qquad$ $RC(1\%) = \{\mathrm{z} \in \mathrm{R}: \mathrm{z} > 2{,}33\}$

Como z_{calc} pertence à $RC(5\%)$ e não pertence à $RC(1\%)$, rejeitaremos H_0 se assumirmos $\alpha = 5\%$, mas aceitaremos H_0 como verdadeira se assumirmos $\alpha = 1\%$.

Ou seja, confirmaremos a afirmação do pecuarista se admitirmos $\alpha = P(\text{Erro Tipo I}) = 0{,}05$ e não confirmaremos a informação do pecuarista se admitirmos α = 0,01.

Como escolher o "melhor" nível de significância?

A escolha do nível de significância deve ser feita **antes** de realizar o teste.

4.3. NÍVEL DESCRITIVO DO TESTE

Problema: A escolha do nível de significância (α) **é arbitrária**.

Procedimento usado nos pacotes estatísticos:

- Calcular a probabilidade de se obter, sob H_0, uma estatística de teste igual ou mais extrema do que aquela obtida na amostra, ou "o menor nível de significância para rejeitarmos a hipótese H_0, com base nos resultados amostrais".
- Este valor é chamado **nível descritivo do teste** (ou p-$valor$) e será denotado neste material por $\hat{\alpha}$.
- Para obtenção de $\hat{\alpha}$ calcula-se a probabilidade de ocorrerem valores mais extremos da estatística observada na amostra e que são mais favoráveis à rejeição de H_0.

Conclusão:

- Se o valor de $\hat{\alpha}$ for **pequeno** ($\hat{\alpha}$ < 5%) nós concluímos pela rejeição da hipótese H_0 a este nível de significância e assumimos que a hipótese H_a é verdadeira.
- Se $\hat{\alpha}$ for **grande** ($\hat{\alpha}$ > 5%) nós aceitamos (não rejeitamos!) a hipótese H_0 como verdadeira.

Se pensarmos no nível descritivo do teste como um risco de rejeitar erroneamente H_0:

- Quando o risco for **pequeno** ($\hat{\alpha}$ < 5%) deveremos rejeitar H_0.
- Quando o risco for **grande** ($\hat{\alpha}$ > 5%) deveremos assumir que a hipótese H_0 é verdadeira e não deveremos rejeitá-la.

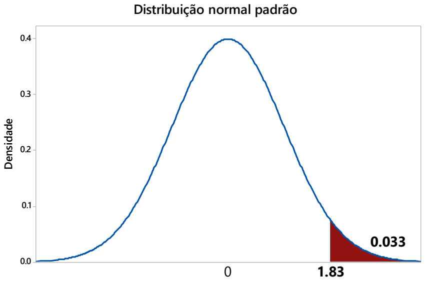
No Exemplo 4.3 podemos calcular o nível descritivo do teste para concluir sobre a afirmação do pecuarista. Lembrando que:

$H_0: \mu = 6{,}0$

$H_a: \mu > 6{,}0$ $\qquad\qquad$ $\bar{x} = 6{,}7 \Rightarrow z_{calc} = 1{,}83$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = P(\bar{x} > 6{,}7)$$

$$= P(Z > 1{,}83) = 0{,}033$$



Como $\hat{\alpha} = 0{,}033$ é considerado pequeno (inferior a 5%), nós rejeitamos H_0 e podemos concluir que a afirmação do pecuarista está correta.

4.4 TESTE SOBRE A MÉDIA DE UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL QUANDO A VARIÂNCIA POPULACIONAL É DESCONHECIDA

Hipóteses:

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_a: \mu \neq \mu_0$ ou $H_a: \mu > \mu_0$ ou $H_a: \mu < \mu_0$

Como a variância populacional é desconhecida (o que é bastante comum!) a estatística do teste é:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}} \tag{23}$$

que tem distribuição t-Student com n–1 graus de liberdade.

Exemplo 5.1. As mudanças observadas no teor de colesterol (mg/100ml) do sangue de coelhos após o tratamento com um novo produto foram medidas em 15 coelhos. Os resultados foram:

17 18 22 20 23 22 21 19 21 24 22 17 19 19 20

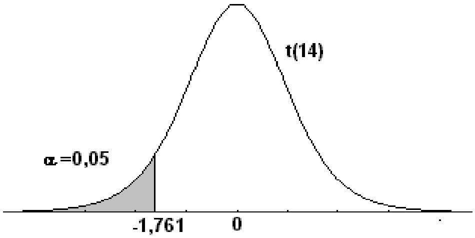
Podemos afirmar que a mudança média no teor de colesterol foi inferior a 21 mg/100ml, ao nível de significância $\alpha = 0{,}05$?

Resolução:

- X: "mudança no teor de colesterol no sangue de coelhos".
- Por suposição: X $\sim N(\mu, \sigma^2)$, mas σ^2 também é desconhecido.
- Hipóteses: H_0: $\mu = 21$

  H_a: $\mu < 21$

- Fixado α = 0,05 obtemos da Tábua III:



$0{,}05 = P(\bar{x} < \bar{x}_c) = P(T < t_c)$

$\Rightarrow t_c = -1{,}761$

$RC(5\%) = \{t \in R: t < -1{,}761\}$

- Da amostra: n = 15, $\bar{x} = 20{,}27$ mg/100ml e s^2= 4,4952

$\Rightarrow t_{calc} = \dfrac{20{,}27-21}{\sqrt{4{,}4952/_{15}}} = -1{,}33$. Como $t_{calc} = -1{,}33 \notin RC(5\%)$, não rejeitamos H_0 e concluímos que a mudança no teor de colesterol do sangue de coelhos não foi inferior a 21 mg/100ml.