

TEORIA DOS CONJUNTOS - LISTA 5

1. Sejam A , B e C conjuntos. Mostre que:

- (a) se $|A| \leq |B|$ e $|B| < |C|$, então $|A| < |C|$;
- (b) se $|A| < |B|$ e $|B| \leq |C|$, então $|A| < |C|$.

2. Mostre que se $A \subset B$, então $|A| \leq |B|$.

3. Mostre que:

- (a) $|A \times B| = |B \times A|$;
- (b) se $B \neq \emptyset$, então $|A| \leq |A \times B|$.

4. Sejam A_1, A_2, B_1 e B_2 conjuntos tais que $|A_1| = |B_1|$ e $|A_2| = |B_2|$. Mostre que:

- (a) se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, então $|A_1 \cup A_2| = |B_1 \cup B_2|$;
- (b) $|A_1 \times A_2| = |B_1 \times B_2|$.

5. Mostre que $|S| \leq |\mathcal{P}(S)|$.

6. Sejam X e Y dois conjuntos. Mostre que se $|X| = |Y|$, então $|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(Y)|$.

7. Sejam A e X conjuntos tais que $X \neq \emptyset$. Mostre que $|A| \leq |{}^X A|$, ${}^X A = \{f \subseteq X \times A : f \text{ é função}\}$.

8. Mostre que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$ se e somente se $|m| < |n|$.

9. Mostre que se S é finito e x é finito para todo $x \in S$, então $\bigcup S$ é finito. Dica: por indução em $|S|$ e usando que a união de dois conjuntos finitos é finita.

10. Mostre que se X e Y são conjuntos finitos tais que $X \cap Y = \emptyset$, então $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.

11. Mostre que se $S = \{X_1, \dots, X_n\}$, onde cada conjunto X_i é finito, e os elementos de S são dois a dois disjuntos (i.e., $X_i \cap X_j = \emptyset$, sempre que $i \neq j$), então $|\bigcup S| = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_n|$.

12. Mostre que se X e Y são conjuntos finitos, então $X \times Y$ também é finito e que $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$. Usando também o exercício 3, conclua que a multiplicação é comutativa.

13. Mostre que se X é finito, então $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. Dica: olhe a demonstração feita em aula de que se X é finito então $\mathcal{P}(X)$ é finito.

14. Mostre que se $\mathcal{C}$ é um conjunto finito tal que X é enumerável para todo $X \in \mathcal{C}$, então $\bigcup \mathcal{C}$ é enumerável. Dica: Análogo ao exercício 9.

15. Mostre que para um conjunto X enumerável e infinito valem as seguintes afirmações:

- (a) Existem $A, B \subset X$ tais que $|A| = |B| = |X|$, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$.
- (b) Existe uma família de conjuntos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $|A_n| = |X|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$.

16. Mostre que:

- (a) Mostre que se A é enumerável, então $A \times \dots \times A = A^n$ é enumerável (pode usar que $A \times A$ é enumerável).

- (b) Mostre que se X é enumerável, então $Y = \{A \subset X : |A| \leq n\}$ é enumerável $\forall n \in \mathbb{N}$. (Dica: Ache $f : X^n \rightarrow Y$ sobrejetora.) Conclua que o conjunto de todos os subconjuntos finitos de X é enumerável.
- (c) Mostre que o conjunto dos polinômios de grau $\leq n$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ é enumerável. Conclua que o conjunto de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{Z}$ é enumerável.
- (d) Mostre que o conjunto dos números algébricos (ou seja, que são raízes de um polinômio com coeficientes em $\mathbb{Z}$) é enumerável. Note que o conjunto dos números transcendentos é não enumerável.
- 17.** Mostre que se $|A| = |\mathbb{N}|$ e E é uma relação de equivalência em A , então A/E é enumerável.
- 18.** Mostre que para um conjunto A qualquer, $|\mathcal{P}(A)| = |^A 2|$. Dica: Usar funções características.
- 19.** Mostre que $|\mathbb{N}\mathbb{N}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |^{\mathbb{N}} 2|$. Dica: ${}^{\mathbb{N}} 2 \subseteq {}^{\mathbb{N}} \mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.