# MAC 414
# Autômatos, Computabilidade e Complexidade
aula 18 — 23/11/2020

# NP-completo

## Definição

*Uma linguagem $L$ é* ***NP****-completa se:*

# NP-completo

## Definição

*Uma linguagem $L$ é* ***NP****-completa se:*

1. $L \in$ ***NP****, e*

# NP-completo

## Definição

*Uma linguagem $L$ é* ***NP**-completa se:*

1. $L \in \mathbf{NP}$, *e*
2. *Para toda* $H \in \mathbf{NP}$, $H < L$.

# NP-completo

## Definição

*Uma linguagem $L$ é **NP**-completa se:*

1. $L \in \mathbf{NP}$, *e*
2. *Para toda* $H \in \mathbf{NP}$, $H < L$.

## Teorema

*Suponha que $L$ é **NP**-completa. Então,*
$\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ *se e só se* $L \in \mathbf{P}$.

# O Teorema de Cook

**Teorema (Cook, 1970)**

*SAT é **NP**-completa.*

# O Teorema de Cook

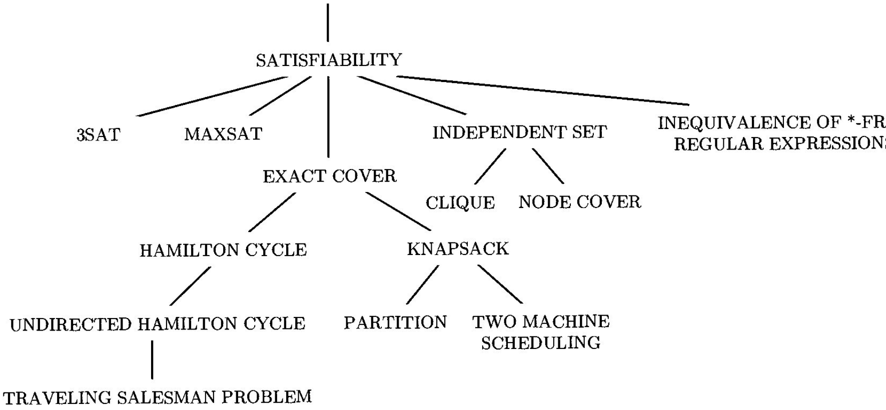
**Teorema (Cook, 1970)**

*SAT é **NP**-completa.*

**Proposição**

*Suponha que $L$ é **NP**-completa, e $H \in$ **NP**. Se $L \prec H$, então $H$ é **NP**-completa.*

# Uma galeria de problemas NP-completos



# 3-SAT

# 3-SAT

3-SAT: o caso particular de SAT, em que cada cláusula tem exatamente 3 literais.

# 3-SAT

3-SAT: o caso particular de SAT, em que cada cláusula tem exatamente 3 literais.

Redução SAT $\prec$ 3-SAT. Dada uma instância $P$ do SAT, vamos produzir, para cada cláusula $C$, uma fórmula $F$ envolvendo as variáveis de $C$ e outras novas, de forma que:

- Toda avaliação de $P$ que torna $C$ verdadeira pode ser estendida a uma avaliação que torna $F$ verdadeira.

# 3-SAT

3-SAT: o caso particular de SAT, em que cada cláusula tem exatamente 3 literais.

Redução SAT $<$3-SAT. Dada uma instância $P$ do SAT, vamos produzir, para cada cláusula $C$, uma fórmula $F$ envolvendo as variáveis de $C$ e outras novas, de forma que:

- Toda avaliação de $P$ que torna $C$ verdadeira pode ser estendida a uma avaliação que torna $F$ verdadeira.
- Toda avaliação que torna $F$ verdadeira, quando restrita à variaveis em $C$, tornam $C$ verdadeira.

# 3-SAT

3-SAT: o caso particular de SAT, em que cada cláusula tem exatamente 3 literais.

Redução SAT $<$3-SAT. Dada uma instância $P$ do SAT, vamos produzir, para cada cláusula $C$, uma fórmula $F$ envolvendo as variáveis de $C$ e outras novas, de forma que:

- Toda avaliação de $P$ que torna $C$ verdadeira pode ser estendida a uma avaliação que torna $F$ verdadeira.
- Toda avaliação que torna $F$ verdadeira, quando restrita à variaveis em $C$, tornam $C$ verdadeira.

# 3-SAT

3-SAT: o caso particular de SAT, em que cada cláusula tem exatamente 3 literais.

Redução SAT $\prec$ 3-SAT. Dada uma instância $P$ do SAT, vamos produzir, para cada cláusula $C$, uma fórmula $F$ envolvendo as variáveis de $C$ e outras novas, de forma que:

- Toda avaliação de $P$ que torna $C$ verdadeira pode ser estendida a uma avaliação que torna $F$ verdadeira.
- Toda avaliação que torna $F$ verdadeira, quando restrita à variaveis em $C$, tornam $C$ verdadeira.

$$P = C_1 \cdot C_2 \cdots C_m \longrightarrow F_1 \cdot F_2 \cdots F_m$$

# Ainda 3-SAT

Abaixo, $u, v$, etc. indicam literais, ou seja, podem ser $x_j$ ou $\bar{x}_j$, onde $x_j$ é uma variável.

# Ainda 3-SAT

Abaixo, $u, v$, etc. indicam literais, ou seja, podem ser $x_j$ ou $\bar{x}_j$, onde $x_j$ é uma variável.

1. $C = u + v$

# Ainda 3-SAT

Abaixo, $u, v$, etc. indicam literais, ou seja, podem ser $x_j$ ou $\bar{x}_j$, onde $x_j$ é uma variável.

1. $C = u + v$

$$F = (u + v + z)(u + v + \bar{z})$$

# Ainda 3-SAT

Abaixo, $u, v,$ etc. indicam literais, ou seja, podem ser $x_j$ ou $\bar{x}_j$, onde $x_j$ é uma variável.

1. $C = u + v$

$$F = (u + v + z)(u + v + \bar{z})$$

2. $C = u$

# Ainda 3-SAT

Abaixo, $u, v$, etc. indicam literais, ou seja, podem ser $x_j$ ou $\bar{x}_j$, onde $x_j$ é uma variável.

1. $C = u + v$

$$F = (u + v + z)(u + v + \bar{z})$$

2. $C = u$

$$F = (u + z + y)(u + \bar{z} + y)(u + z + \bar{y})(u + \bar{z} + \bar{y})$$

# Ainda 3-SAT

Abaixo, $u, v$, etc. indicam literais, ou seja, podem ser $x_j$ ou $\bar{x}_j$, onde $x_j$ é uma variável.

1. $C = u + v$

   $$F = (u + v + z)(u + v + \bar{z})$$

2. $C = u$

   $$F = (u + z + y)(u + \bar{z} + y)(u + z + \bar{y})(u + \bar{z} + \bar{y})$$

3. $C = u_0 + \cdots + u_n$, $n \geq 3$

# Ainda 3-SAT

Abaixo, $u, v$, etc. indicam literais, ou seja, podem ser $x_j$ ou $\bar{x}_j$, onde $x_j$ é uma variável.

1. $C = u + v$

$$F = (u + v + z)(u + v + \bar{z})$$

2. $C = u$

$$F = (u + z + y)(u + \bar{z} + y)(u + z + \bar{y})(u + \bar{z} + \bar{y})$$

3. $C = u_0 + \cdots + u_n,\ n \geq 3$

# Ainda 3-SAT

Abaixo, $u, v$, etc. indicam literais, ou seja, podem ser $x_j$ ou $\bar{x}_j$, onde $x_j$ é uma variável.

1. $C = u + v$

$$F = (u + v + z)(u + v + \bar{z})$$

2. $C = u$

$$F = (u + z + y)(u + \bar{z} + y)(u + z + \bar{y})(u + \bar{z} + \bar{y})$$

3. $C = u_0 + \cdots + u_n,\ n \geq 3$

$$F = (u_0 + u_1 + z_1)(\bar{z}_1 + u_2 + z_2)(\bar{z}_2 + u_3 + z_3)\cdots(\bar{z}_{n-2} + u_{n-1} + u_n)$$

0

$(u_0 + u_1 + z)\ (z + u_2 + u_3)$ $\quad$ $u_3 = 1$

# Not all equal 3-sat

Schaefer (1978)

# NOT ALL EQUAL 3-SAT

Schaefer (1978)

DADOS: uma instância $P$ do 3-SAT.

# NOT ALL EQUAL 3-SAT

Schaefer (1978)

DADOS: uma instância $P$ do 3-SAT.

PROB: Existe uma avaliação verdadeira de $P$ tal que, em cada cláusula, algum literal vale 1 e um outro vale 0?

# NOT ALL EQUAL 3-SAT

Schaefer (1978)

DADOS: uma instância $P$ do 3-SAT.

PROB: Existe uma avaliação verdadeira de $P$ tal que, em cada cláusula, algum literal vale 1 e um outro vale 0?

Redução a 3-SAT: $(a + b + c) \to (a + b + c)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$

$(x + \bar{y} + \bar{z}) \to (x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + z)$

# Not all equal 3-sat

Schaefer (1978)

DADOS: uma instância $P$ do 3-SAT.

PROB: Existe uma avaliação verdadeira de $P$ tal que, em cada cláusula, algum literal vale 1 e um outro vale 0?

Redução a 3-SAT: $(a+b+c) \rightarrow (a+b+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$

Redução a partir do 3-SAT.

# NOT ALL EQUAL 3-SAT

Schaefer (1978)

DADOS: uma instância $P$ do 3-SAT.

PROB: Existe uma avaliação verdadeira de $P$ tal que, em cada cláusula, algum literal vale 1 e um outro vale 0?

Redução a 3-SAT: $(a+b+c) \rightarrow (a+b+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$

Redução a partir do 3-SAT.

$$(a+b+c) \longrightarrow (a+x+y)(b+x+z)(c+y+z)\cdot$$
$$(x+y+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z)$$

# Exact cover

# Exact cover

DADOS: Um conjunto $U$ e uma família $F$
de subconjuntos de $U$.

PROB: Existe uma subfamília de $F$ que particiona $U$?

A matriz binária
existe uma soma de
linhas que é $(1, 1, \ldots, 1)$

# Exact cover

DADOS: Um conjunto $U$ e uma família $F$
de subconjuntos de $U$.

PROB: Existe uma subfamília de $F$ que particiona $U$?

Redução de SAT:

# Exact cover

DADOS: Um conjunto $U$ e uma família $F$
de subconjuntos de $U$.

PROB: Existe uma subfamília de $F$ que particiona $U$?

Redução de SAT:

Ex: $C_1 = x_1 + \bar{x}_2, C_2 = \bar{x}_1 + x_2 + x_3, C_3 = x_2, C_4 = \bar{x}_2 + \bar{x}_3.$

# Exact cover

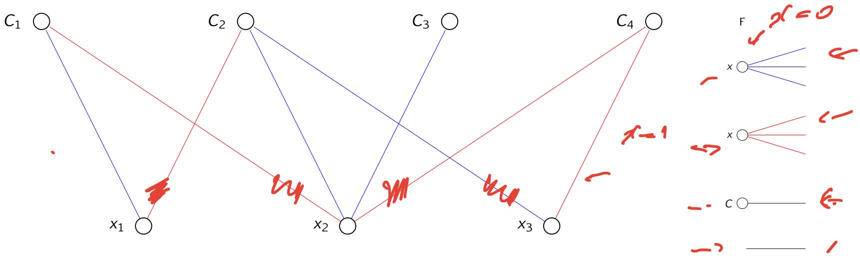
DADOS: Um conjunto $U$ e uma família $F$
de subconjuntos de $U$.

PROB: Existe uma subfamília de $F$ que particiona $U$?

Redução de SAT:

Ex: $C_1 = x_1 + \bar{x}_2, C_2 = \bar{x}_1 + x_2 + x_3, C_3 = x_2, C_4 = \bar{x}_2 + \bar{x}_3.$

$U$ = vértices e arestas abaixo. 1 1 0



# Conjunto independente

# Conjunto independente

DADOS: Um grafo $G$ e um inteiro $K$.

PROB: Existe um conjunto de $K$ vértices de $G$ tal que não há arestas entre eles?

max $K$

exist cj indep de tam $K$

# Conjunto independente

DADOS: Um grafo $G$ e um inteiro $K$.

PROB: Existe um conjunto de $K$ vértices de $G$ tal que não há arestas entre eles?

Redução de 3-SAT: Dada uma fórmula, $G$ consiste de:

# Conjunto independente

DADOS: Um grafo $G$ e um inteiro $K$.

PROB: Existe um conjunto de $K$ vértices de $G$ tal que não há arestas entre eles?

Redução de 3-SAT: Dada uma fórmula, $G$ consiste de:

Um triângulo por cláusula, cada vértice rotulado por um literal dela.

Arestas ligando rótulos $x$—$\bar{x}$.

$K$ é o número de cláusulas.

# CONJUNTO INDEPENDENTE

DADOS: Um grafo $G$ e um inteiro $K$.

PROB: Existe um conjunto de $K$ vértices de $G$ tal que não há arestas entre eles?

Redução de 3-SAT: Dada uma fórmula, $G$ consiste de:

Um triângulo por cláusula, cada vértice rotulado por um literal dela.

Arestas ligando rótulos $x$—$\bar{x}$.

$K$ é o número de cláusulas.

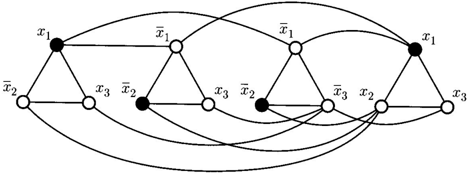
$\bar{x}_1$

$$(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_1 + x_2 + x_3)$$

100

gadget

engenhoca



# Consequências

- CLIQUE

# Consequências

- CLIQUE

# Consequências

- CLIQUE
  DADOS: Um grafo $G$ e um inteiro $K$.
  PROB: Existe um conjunto de $K$ vértices de $G$
  todos interligados? $G \to \overline{G}$
- NODE COVER

# Consequências

- CLIQUE
  DADOS: Um grafo $G$ e um inteiro $K$.
  PROB: Existe um conjunto de $K$ vértices de $G$ todos interligados?
- NODE COVER

# Consequências

- Clique
  DADOS: Um grafo $G$ e um inteiro $K$.
  PROB: Existe um conjunto de $K$ vértices de $G$ todos interligados?

$X$ é cobertura $\Leftrightarrow V_G \setminus X$ é indep

- Node cover
  DADOS: Um grafo $G$ e um inteiro $K$.
  PROB: Existe um conjunto $X$ de $K$ vértices de $G$ tal que toda aresta tem uma ponta em $X$?

# Hamiltoniano dirigido

Dado um grafo dirigido,

existe circuito hamiltoniano dirigido?

# Hamiltoniano dirigido

Dado um grafo dirigido,

existe circuito hamiltoniano dirigido?

Redução de Node cover. Dados $G, K$, construímos $D$

Vértices: $\{a_1, \ldots, a_K\}$+ 4 vértices para cada aresta $e = vw$.

Arestas: As dos blocos abaixo mais arestas correspondendo a uma lista arestas por vértice. Os vértices $a_j$ completam ciclos com todas essas listas.

AHU

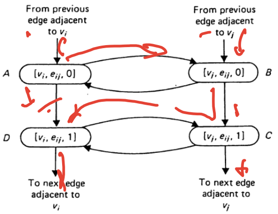
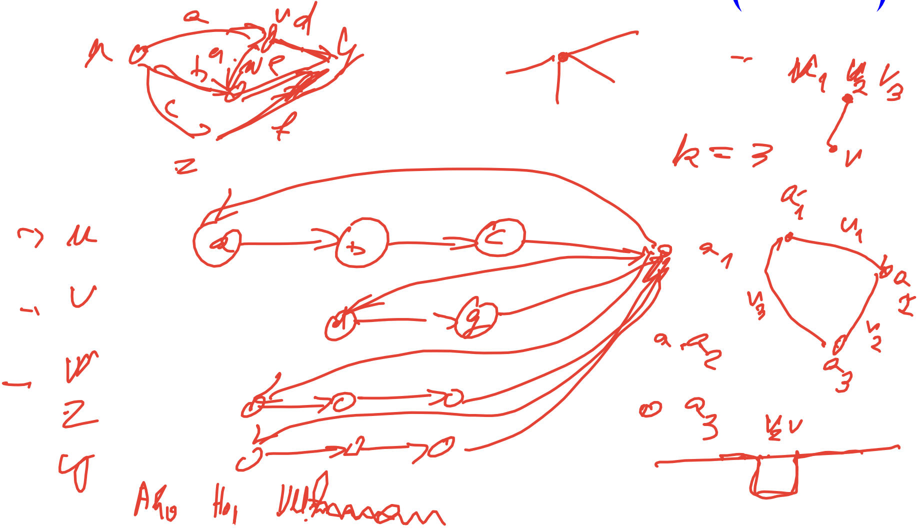



**Fig. 10.10** Representation of an edge $(v_i, v_j)$.

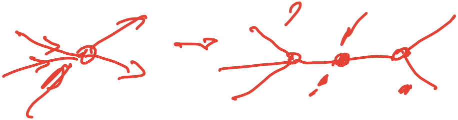
# Hamiltoniano dirigido (cont.)



# Consequências

- Hamiltoniano

# Consequências



- Hamiltoniano

- Caixeiro viajante

# Autômatos

# Autômatos

Dada uma ou mais linguagens regulares...

# Autômatos

Dada uma ou mais linguagens regulares...

Se dadas por autômatos determinísticos, dá prá resolver tudo.

# Autômatos

Dada uma ou mais linguagens regulares...

Se dadas por autômatos determinísticos, dá prá resolver tudo.

Se dadas por ER ou AND, problema!

# Autômatos

Dada uma ou mais linguagens regulares...

Se dadas por autômatos determinísticos, dá prá resolver tudo.

Se dadas por ER ou AND, problema!

E tanto faz, já que existem transformações polinomiais de uma representação para a outra.

# Autômatos

Dada uma ou mais linguagens regulares...

Se dadas por autômatos determinísticos, dá prá resolver tudo.

Se dadas por ER ou AND, problema!

E tanto faz, já que existem transformações polinomiais de uma representação para a outra.

Ex: EQUIVALÊNCIA DE LINGUAGENS REGULARES

# Autômatos

Dada uma ou mais linguagens regulares...

Se dadas por autômatos determinísticos, dá prá resolver tudo.

Se dadas por ER ou AND, problema!

E tanto faz, já que existem transformações polinomiais de uma representação para a outra.

Ex: EQUIVALÊNCIA DE LINGUAGENS REGULARES

Se dadas por AD, está em **P**.

# Autômatos

Dada uma ou mais linguagens regulares...

Se dadas por autômatos determinísticos, dá prá resolver tudo.

Se dadas por ER ou AND, problema!

E tanto faz, já que existem transformações polinomiais de uma representação para a outra.

Ex: EQUIVALÊNCIA DE LINGUAGENS REGULARES

Se dadas por AD, está em **P**.

Se dadas por ER ou AND

# Autômatos

Dada uma ou mais linguagens regulares...

Se dadas por autômatos determinísticos, dá prá resolver tudo.

Se dadas por ER ou AND, problema!

E tanto faz, já que existem transformações polinomiais de uma representação para a outra.

Ex: EQUIVALÊNCIA DE LINGUAGENS REGULARES

Se dadas por AD, está em **P**.

Se dadas por ER ou AND?????

# Inequivalência

# Inequivalência

Dadas duas ERs, elas representam linguagens distintas?

# Inequivalência

Dadas duas ERs, elas representam linguagens distintas?

Tem certificado natural: uma palavra de uma que não está na outra.

# Inequivalência

Dadas duas ERs, elas representam linguagens distintas?

Tem certificado natural: uma palavra de uma que não está na outra.

Pode não ser sucinto (palavrão?).

# Inequivalência

Dadas duas ERs, elas representam linguagens distintas?

Tem certificado natural: uma palavra de uma que não está na outra.

Pode não ser sucinto (palavrão?). Precisa restringir.

# Inequivalência

Dadas duas ERs, elas representam linguagens distintas?

Tem certificado natural: uma palavra de uma que não está na outra.

Pode não ser sucinto (palavrão?). Precisa restringir.

INEQUIVALÊNCIA RESTRITA: Dada duas ERs livres de $^*$, elas representam linguagens distintas?

# Inequivalência

Dadas duas ERs, elas representam linguagens distintas?

Tem certificado natural: uma palavra de uma que não está na outra.

Pode não ser sucinto (palavrão?). Precisa restringir.

INEQUIVALÊNCIA RESTRITA: Dada duas ERs livres de $*$, elas representam linguagens distintas?

Essa ERs descrevem linguagens finitas, comprimento máximo menor que o da expressão.

# Inequivalência

Dadas duas ERs, elas representam linguagens distintas?

Tem certificado natural: uma palavra de uma que não está na outra.

Pode não ser sucinto (palavrão?). Precisa restringir.

Inequivalência restrita: Dada duas ERs livres de $^*$, elas representam linguagens distintas?

Essa ERs descrevem linguagens finitas, comprimento máximo menor que o da expressão.

Inequivalência restrita é **NP**-completo.

# Inequivalência

Dadas duas ERs, elas representam linguagens distintas?

Tem certificado natural: uma palavra de uma que não está na outra.

Pode não ser sucinto (palavrão?). Precisa restringir.

INEQUIVALÊNCIA RESTRITA: Dada duas ERs livres de $^*$, elas representam linguagens distintas?

Essa ERs descrevem linguagens finitas, comprimento máximo menor que o da expressão.

INEQUIVALÊNCIA RESTRITA é **NP**-completo.

Redução de SAT.

# Inequivalência - Redução

Dada uma fórmula $F = C_1 \cdots C_m$, com variáveis $x_1, \ldots, x_n$, duas ERs:

1. $E_1 = (0 + 1)^n$

# Inequivalência - Redução

Dada uma fórmula $F = C_1 \cdots C_m$, com variáveis $x_1, \ldots, x_n$, duas ERs:

1. $E_1 = (0+1)^n$
2. $E_2 = R_1 + \cdots + R_m$ com

$$R_i = \alpha_{i1}\alpha_{i2}\cdots\alpha_{in}$$

onde

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } x_j \text{ ocorre em } C_i \\ 1, & \text{se } \bar{x}_j \text{ ocorre em } C_i \\ (0+1) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

# Inequivalência - Redução

Dada uma fórmula $F = C_1 \cdots C_m$, com variáveis $x_1, \ldots, x_n$, duas ERs:

1. $E_1 = (0+1)^n$
2. $E_2 = R_1 + \cdots + R_m$ com

$$R_i = \alpha_{i1}\alpha_{i2}\cdots\alpha_{in}$$

onde

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } x_j \text{ ocorre em } C_i \\ 1, & \text{se } \bar{x}_j \text{ ocorre em } C_i \\ (0+1) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

# Inequivalência - Redução

Dada uma fórmula $F = C_1 \cdots C_m$, com variáveis $x_1, \ldots, x_n$, duas ERs:

1. $E_1 = (0+1)^n$
2. $E_2 = R_1 + \cdots + R_m$ com

$$R_i = \alpha_{i1}\alpha_{i2}\cdots\alpha_{in}$$

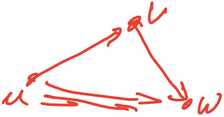
onde

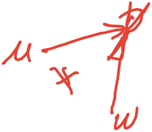
$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } x_j \text{ ocorre em } C_i \\ 1, & \text{se } \bar{x}_j \text{ ocorre em } C_i \\ (0+1) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$R_i$ são as atribuições que não satisfazem $C_i$.

# Orientações localmente transitivas

Seja $G$ um grafo dirigido. Ele é transitivo num vértice $v$ se não existem vértices $u, w$ tais que $u \to v$ e $v \to w$ são arestas, mas $u \to w$ não é.



# Orientações localmente transitivas

Seja $G$ um grafo dirigido. Ele é transitivo num vértice $v$ se não existem vértices $u, w$ tais que $u \to v$ e $v \to w$ são arestas, mas $u \to w$ não é.

DADOS: Um grafo $G$ e um conjunto $T$ de vértices.
PROB: Existe uma orientação acíclica de $G$ que é transitiva em todos vértices de $T$?

# Orientações localmente transitivas

Seja $G$ um grafo dirigido. Ele é transitivo num vértice $v$ se não existem vértices $u, w$ tais que $u \to v$ e $v \to w$ são arestas, mas $u \to w$ não é.

DADOS: Um grafo $G$ e um conjunto $T$ de vértices.
PROB: Existe uma orientação acíclica de $G$ que é transitiva em todos vértices de $T$?

Se $T = \emptyset$, trivial.

# Orientações localmente transitivas

Seja $G$ um grafo dirigido. Ele é transitivo num vértice $v$ se não existem vértices $u, w$ tais que $u \to v$ e $v \to w$ são arestas, mas $u \to w$ não é.

DADOS: Um grafo $G$ e um conjunto $T$ de vértices.
PROB: Existe uma orientação acíclica de $G$ que é transitiva em todos vértices de $T$?

Se $T = \emptyset$, trivial.

Se $T = VG$, grafo de comparabilidade, em **P**.

G:s Fernandes, Green. Mandel

# Orientações localmente transitivas

Seja $G$ um grafo dirigido. Ele é transitivo num vértice $v$ se não existem vértices $u, w$ tais que $u \to v$ e $v \to w$ são arestas, mas $u \to w$ não é.

DADOS: Um grafo $G$ e um conjunto $T$ de vértices.
PROB: Existe uma orientação acíclica de $G$ que é transitiva em todos vértices de $T$?

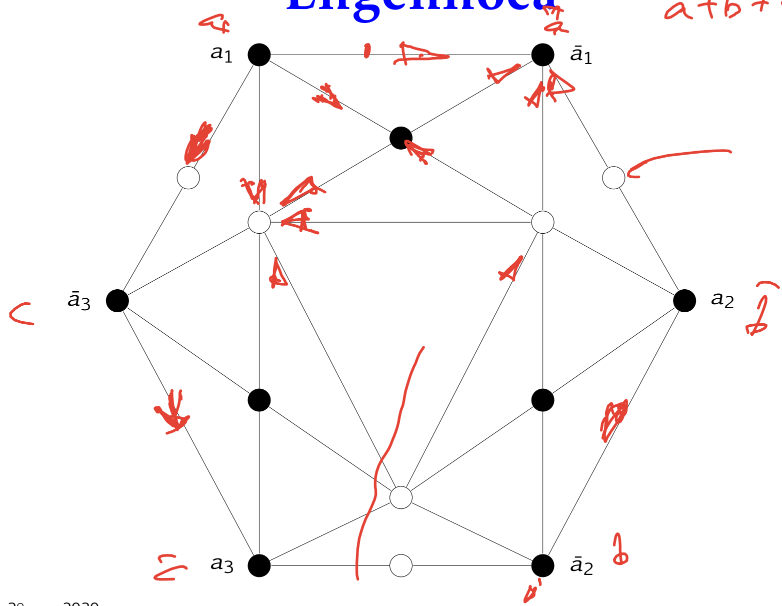
Se $T = \emptyset$, trivial.

Se $T = VG$, grafo de comparabilidade, em **P**.

Em geral é **NP**-completo.
Redução de NOT ALL EQUAL 3-SAT.

# Engenhoca

$a + \bar{b} + \bar{c}$



# Redução

Dada $F = C_1 \cdots C_m$, variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Então, $G$ consiste de:

1. Uma engenhoca por cláusula. Os vértices $a_1, a_2, a_3$ são rotulados com os literais da cláusula, e os $\bar{a}_j$ com os respectivos complementos.

# Redução

Dada $F = C_1 \cdots C_m$, variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Então, $G$ consiste de:

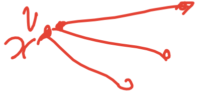
1. Uma engenhoca por cláusula. Os vértices $a_1, a_2, a_3$ são rotulados com os literais da cláusula, e os $\bar{a}_j$ com os respectivos complementos.
2. Vértices $v_1, \ldots, v_n$, todos em $T$. Vértice $v_i$ ligado a todos os vértices com rótulo $x_i$

# Redução

Dada $F = C_1 \cdots C_m$, variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Então, $G$ consiste de:

1. Uma engenhoca por cláusula. Os vértices $a_1, a_2, a_3$ são rotulados com os literais da cláusula, e os $\bar{a}_j$ com os respectivos complementos.
2. Vértices $v_1, \ldots, v_n$, todos em $T$. Vértice $v_i$ ligado a todos os vértices com rótulo $x_i$

# Redução



Dada $F = C_1 \cdots C_m$, variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Então, $G$ consiste de:

1. Uma engenhoca por cláusula. Os vértices $a_1, a_2, a_3$ são rotulados com os literais da cláusula, e os $\bar{a}_j$ com os respectivos complementos.
2. Vértices $v_1, \ldots, v_n$, todos em $T$. Vértice $v_i$ ligado a todos os vértices com rótulo $x_i$

Numa orientação transitiva em $T$, para cada $v_i$ todas arestas apontam para $v_i$ $(x_i = 1)$ ou todas saem de $v_i$ $(x_i = 0)$.