

Conjuntos enumeráveis

Def: Um conjunto S é enumerável se $|S| \leq |\mathbb{N}|$

Obs: Também define-se S enumerável como sendo $|S| = |\mathbb{N}|$ (depende do livro/autor). Neste caso usa-se o termo "máximo enumerável" quando tem $|S| \leq |\mathbb{N}|$.

Vamos listar abaixo algumas propriedades dos conjuntos enumeráveis. Muitas delas são parecidas com as dos finitos. Vou apenas dar uma ideia/esboço de algumas demonstrações.

Algumas propriedades

- 1) Se $A \subset B$ e B é enumerável, então A é enumerável
- 2) Se A é enumerável e f é função ^{com $\text{Dom} f = A$} , então $f[A]$ é enumerável.

Obs: 1. A den de 1) e 2) usa o Teor. de Recursão e análogo ao que se faz no caso dos conjuntos finitos

2. Em 1), segue da demonstração que se A é infinito,

então $|A| = |\mathbb{N}|$. Note que também temos: $= |\mathbb{N}|$

$|S| \leq |\mathbb{N}| \Rightarrow \exists f: S \rightarrow \mathbb{N}$ injetora $\Rightarrow |S| = |A|$ para algum

$A \subset \mathbb{N}$. Com isso, segue da den de 1) que

$|S| \leq \mathbb{N} \rightarrow S$ é finito ou $|S| = |\mathbb{N}|$.

3) Se A e B são dois conjuntos enumeráveis, então $A \cup B$ também é enumerável.

De de um caso: Suponha A e B infinitos. Então como A e B são enumeráveis temos que: $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow A$ bijetora e $\exists g: \mathbb{N} \rightarrow B$ bijetora

Defina $h: \mathbb{N} \rightarrow A \cup B$ tal que

$$h(2k) = f(k) \text{ e}$$

$$h(2k+1) = g(k)$$

Temos que h é sobrejetora, ^{logo} $|A \cup B| \leq |\mathbb{N}|$ (ou seja $|A \cup B| = |\mathbb{N}|$)
 $A \cup B$ é infinito e enumerável).
 $\hookrightarrow$ pois $|\mathbb{N}| = |A| \leq |A \cup B|$, agora use o Teor de Bernstein-Cantor.

O caso em que A e/ou B é finito é análogo ao caso finito. //

• E para uniões de mais de dois conjuntos?

Temos:

4) A união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável, ou seja, se $\mathcal{C}$ é finito e X é enumerável $\forall X \in \mathcal{C}$, então $\bigcup \mathcal{C}$ é enumerável.

De: Exercício (~~para~~^{análogo} ao exercício do caso finito).

• Vale também que:

5) Uma união enumerável de conjuntos enumeráveis
(infinitos)
é um conjunto enumerável.

Sobre a demonstração: Use o Axioma de Escolha. Um
caminho para mostrar é (supondo C e X , $\forall x \in C$, infinitos):
 C enumerável $\Rightarrow$ pode escrever $C = \{X_{i_k} : k \in \mathbb{N}\}$, onde
 i_k é o k -ésimo n.º primo

Denote por a_n o n -ésimo termo de X_{i_k} . Daí define

$f: \cup C \rightarrow \mathbb{N}$, que é injetora.

$a_n \in X_{i_k} \rightarrow i_k$ é o menor primo t.q. $a_n \in X_{i_k}$ e supondo
 $X_{i_k} = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$, $i \neq j \rightarrow a_i \neq a_j$

• Uma outra propriedade importante é:

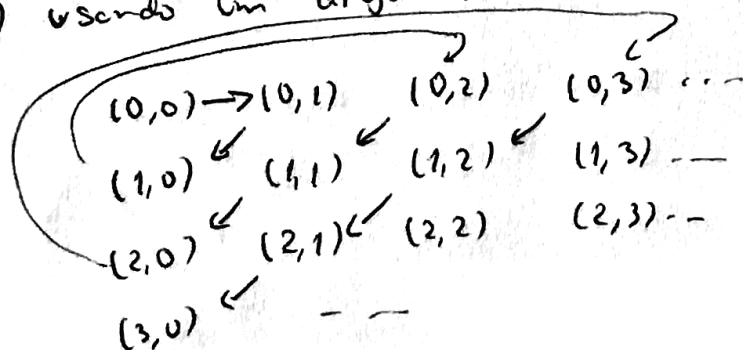
Teorema: Se A e B são conjuntos enumeráveis, então
 $A \times B$ também é enumerável.

"Deu" (ideia): (fica como exercício verificar isso).

Primeiro note que basta mostrar que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

Existem várias demonstrações possíveis para esse fato,
vamos mencionar 3 delas:

1º) usando um argumento de "diagonalização", por ex.emb.



(segundo os "Atecho")
de para "construir"
um função bijetora
 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.)

2:) Definindo uma função bijetora dando uma "fórmula".
 Por exemplo, $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é bijetora.

$$f(k+n) = 2^k(2n+1)-1$$

3:) Usando o Teorema de Bernstein Cantor, sabemos que basta
 mostrar que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ e $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$.
 exercício de lista (mais geral?) use $(n, m) \rightarrow p_n^m$ onde p_n é o n-ésimo primo.

Consequência: $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis infinitos, ou seja, $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

Dev: use que $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ (e ex. 17 de L5)

- $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$
- $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}|$
- use que $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} / \sim$
- $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{Q}|$

Obs: Vale também que produto finito de conjuntos
enumeráveis é enumerável (por indução, exercício).

Ma) não vale que produto enumerável de conj. enumeráveis
 é enumerável. Por exemplo, $\mathbb{N}^k$ é enum. mas $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ não é.

• Ou seja, temos conjuntos infinitos que não são enumeráveis,
 os conjuntos "não enumeráveis", nosso próximo tópico.