

Aula 21 - 23/11

Lista de exercícios para entregar em 30/11:

4 - b, p.

5

7 - c, e

8 - e, f

Exercício 9. Determine todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais as séries convergem:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Solução

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

Fixemos $x \in \mathbb{R}$.

Vamos usar o Critério da razão

tomando $a_n = \left| \frac{x^n}{n} \right| = \frac{|x|^n}{n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|x|^n}{n}} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n} = |x| \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = |x|$$

Pelo Critério da razão

- Se $|x| < 1$, então a série converge
- Se $|x| > 1$, então a série diverge

Se $|x| = 1$:

2

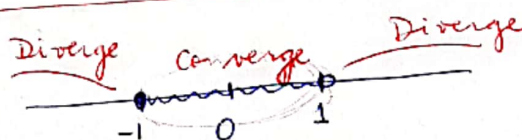
(i) $x = 1$: $\sum \frac{x^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ (série harmônica)
que é divergente.

(ii) $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
(série harmônica)
alternada)
que é convergente.

Resposta. A série $\sum \frac{x^n}{n}$ converge
se e somente se $-1 \leq x < 1$

observação. O conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$
é o domínio da função

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$



$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

(3)

Fixemos $x \in \mathbb{R}$.
Seja $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$ e vamos usar o Critério da

razão:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0 \quad (< 1)$$

Pelo critério da razão, a série é convergente!
para todo $|x| \in \mathbb{R}$ fixado,
usando que "toda série abs conv é conv",
Portanto, a série define

uma função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Toda expressão do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

sendo $c_0, c_1, c_2, \dots$ constantes

é uma série de potências

Para cada x fixado, essa série é série numérica
pode ser convergente ou divergente.

O conjunto dos valores de x para os quais a
série converge é o domínio de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Exemplo 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Série geométrica

é convergente sempre que $-1 < x < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Exemplo 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

$$= \underbrace{1x^0}_{1} + 1x + 2x^2 + 3!x^3 + \dots$$

Fixado $x \in \mathbb{R}$, definimos
 $a_n = |x|^n n!$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{n+1} (n+1)!}{|x|^n \cdot n!} = |x| (n+1). \quad (\text{para } x \neq 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

Logo, a série é divergente se $|x| \neq 0$.

$$\text{Se } x=0: \sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot \underline{0^n} = 1$$

Convenção: $x^0 = 1$, $\forall x$ (mesmo no caso $x=0$)

$$\sum c_n x^n = c_0 \underbrace{x^0}_{1} + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \dots$$

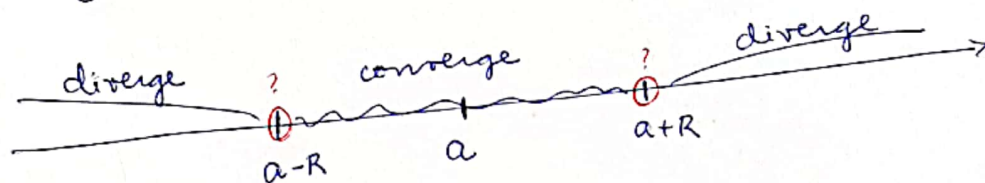
Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

é uma série de potências em $(x-a)$,
ou " " centrada em a ,
ou ainda, série de potências em torno de a .

Veremos que uma série de potências em $(x-a)$:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ou converge em } \mathbb{R} \\ \text{ou converge apenas em } x=a \\ \text{ou converge em um intervalo de raio } R \\ \text{centrado em } a: \end{array} \right.$



Exemplo 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$

Para $x \in \mathbb{R}$ fixado, defina $a_n = \left| \frac{(x-3)^n}{n} \right| = \frac{|x-3|^n}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-3|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x-3|^n} = |x-3| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = |x-3|$$

Pelo Teste da Razão, sabemos que

(a) Se $|x-3| < 1$, a série é convergente

(b) Se $|x-3| > 1$, a série é divergente

(c) Se $|x-3| = 1$, o teste da razão não dá informação.

(i) se $x=4$ então a série fica $\sum \frac{1}{n}$ (harmônica $\Rightarrow$ diverge)

(ii) se $x=2$ então a série fica $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (harmônica alternada $\Rightarrow$ converge)

Portanto, a série é convergente $\Leftrightarrow x \in [-2, 4[$