

TEOREMA: $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ DE CLASSE C^1 ,
 TAL QUE, $\forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $\forall t \neq 0$,
 $f(tx) = t^n f(x)$. (f É HOMOGÊNEO DE GRAU N).

ENTÃO $\forall x \in \mathbb{R}^N$,
 $\langle x, \nabla f(x) \rangle = N \cdot f(x)$

DEM:

$$g(t) = f(tx) = t^n \cdot f(x)$$

$$g'(t) = n \cdot t^{n-1} f(x)$$

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i$$

$$g'(t) = f(tx_1, tx_2, \dots, tx_N)$$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \cdot x_N$$

$$g'(t) = n \cdot f(x) = \langle \nabla f(x), x \rangle \quad \square$$

(2)

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle B(q) \dot{q}; \dot{q} \rangle = L$$

H é TRANSFORMADA DE LÉGENDRE DE T em
RELAÇÃO A $\dot{q}$.

$$H(q, p) = \max_{\dot{q} \in \mathbb{R}^n} (p \cdot \dot{q} - T(q, \dot{q}))$$

$$= \max_{\dot{q}} [p \cdot \dot{q} - T(q, \dot{q})]$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - T(q, \dot{q}) = 2T(q, \dot{q}) - T(q, \dot{q}) =$$

$$= T(q, \dot{q}_p).$$

vimos então que, se

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q)$$

$$H(q, p) = \tilde{T}(q, p) + U(q)$$

onde $\tilde{T}(q, p) = T(q, \dot{q}_p).$

FORMALISMO
LAGRANGIANO

$$L: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

VARIÁVEIS

$$q, \dot{q}, t$$

EQ. EULER-LAGRANGE

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

VARIACIONAL

FORMALISMO
HAMILTONIANO

$$H: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

VARIÁVEIS

$$q, p, t$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

SISTEMA DE EDO's

ELUCROS NO

ESPAÇO DE FASE.

(CÁSCA AUTÔNOMO)

ESTIVANDO MELHOR SISTEMAS HAMILTONIANOS..

(4)

~~CASO MAIS INTER~~

(1) SE H NÃO DEPENDE DE λ .

O SISTEMA

$$(EH) \quad \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

É AUTÔNOMA.

$$H: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}^2.$$

(2) SE H NÃO DEPENDE DE λ ,
É $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$\gamma(t) = (q(t), p(t))$ É SOLUÇÃO DE

(EH) , ENTÃO

$g(t) = H \circ \gamma(t)$ É CONSTANTE.

DÊM!

$$q_1'(x) = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) = 0.$$

SE H NÃO DEPENDER DE q_1 .

CHAMAMOS

 q_1 DE COORDENADACÍCLICA DE H .ENTÃO p_1 É UMA INTEGRAL PRIMEIRA DE (E, H) .

Logo!

$$H \cong \tilde{H}(q_2, \dots, q_N, p_2, \dots, p_N, \tau, p_1).$$

E PORTANTO podemos TOMAR p_1 como um
PARÂMETRO DO SISTEMA

$$-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_i} = \dot{p}_i \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad 2 \leq i \leq N.$$

DEPOIS DE RESOLVER.

$$\text{ENCONTRO } q_1(x) \text{ POR } \dot{q}_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1}(q(x))$$

 $q(x)$ É A SOLUÇÃO DO SISTEMA ENCONTRADA.

Ex:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \tilde{H}(q_2, p_2, p_1).$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_1}(q_2(t), p_2(t), p_1(t)).$$

mas $p_1(t) = p_1(a)$ e encontramos $\tilde{H}$
 $q_2(t), p_2(t).$

$$\text{Logo } \dot{q}_1 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_1}(q_2(t), p_2(t), p_1(a)) = g(t).$$

$$q_1(t) = q_1(a) + \int_a^t g(s) ds.$$

FLUXO HAMILTONIANO:

FLUXO DE UM SISTEMA DE EDOs AUTÔNOMO.

CASO GERAL

temos a E.D.O.

com $F \in C^1$
 $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$(*) \quad \dot{X} = F(X)$$

VAMOS ASSUMIR QUE, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^N$,
A SOLUÇÃO MAXIMAL

DE (*) QUE SATISFAZ.

$X(0) = x_0$ ESTÁ DEFINIDA EM

TODA A RETA:

NESTA SITUAÇÃO, PODÊMOS DEFINIR.

UMA FUNÇÃO

$$\Phi: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

ONDE $\Phi(x_0, t_0)$ É O VALOR DA SOLUÇÃO

DE (*) EM QUE NO TEMPO t_0 VALE x_0 /
NO TEMPO t_0

SE $\gamma(t)$ É A SOLUÇÃO PE
EH QUE SATISFAZ
 $\gamma(0) = x_0$.

$$\Phi(x_0, t_0) = \gamma(t_0).$$

SE GUE DA TEORIA CLÁSSICA DE
E.D.O.s. QUE

$$\Phi \in C^1.$$

ALÉM DISSO:

SE
 $g_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ É A APLICAÇÃO:

$$g_x(x) = \Phi(x, x).$$

ENTÃO g_x É UM DIFEOMORFISMO.

ALÉM DISSO: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$

$$g_{x_1+x_2} = g_{x_1} \circ g_{x_2}.$$

$(g_x)_{x \in \mathbb{R}}$ É UM GRUPO DE DIFEOMORFISMOS.

$$g_0 = I_D.$$

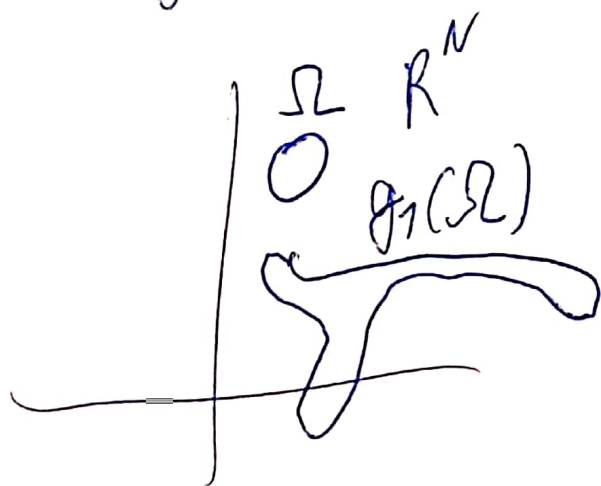
~~DADO UMA REGIÃO MENSURÁVEL~~

9

DADO UM ABERTO Ω LIMITADO.

SEJA $V(t) = \lambda(g_t(\Omega))$ λ MEDIDA DE
LEBESGUE.

~~VOLUME DA ÁREA DO TEMPO~~



TEOREMA DE LIOUVILLE:

SE $\text{DIV } F \equiv 0$, ENTÃO $\forall \Omega$,

~~$V(t) \equiv V(0)$~~

$$\text{DIV } F \equiv \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

$$F = (F_1, \dots, F_N).$$

$$\text{DIV } F = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_N} & \frac{\partial F_2}{\partial x_N} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{vmatrix}$$

$$\text{Div } F \equiv \text{TR} (DF).$$

DEM:

$$V(x) = \int_{\Omega} \text{DET}(g_x(x)) dx.$$

$$V'(x) = \int_{\Omega} \frac{d}{dx} \text{DET}(Dg_x(x)) dx.$$

$$Dg_x(x)$$

$$g_x(x) = x + x \cdot F(x) + O(x^2).$$

$$Dg_x(x) = I_0 + x \cdot DF + O(x^2).$$

$$\text{DET}(I_0 + x \cdot DF + O(x^2))$$

$$+ O(x^2)$$

$$\text{DET} = \begin{vmatrix} 1 & x \cdot DF \\ x \cdot DF & 1 \end{vmatrix}$$

(11)

$$\text{DET} (E + \lambda \cdot A) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \dots \\ \lambda a_{21} & 1 + \lambda a_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} =$$

$$\text{DET} \left(\text{diag} (1 + \lambda a_{11}, 1 + \lambda a_{22}, 1 + \lambda a_{33}, \dots, 1 + \lambda a_{nn}) \right) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda a_{ii}) + \mathcal{O}(\lambda^2) =$$

$$1 + \lambda \cdot \sum a_{ii} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\text{DET} (E + \lambda A) = 1 + \lambda \cdot \text{TR} A + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\frac{d}{dt} \text{DET} (D_{g_t} \phi) = \frac{d}{dt} (1 + \text{tr} D \log F_t) \quad (2)$$

$$V'(a) \geq 0.$$

Caralário! Se H é um hamiltoniana
Autônoma.

ENTÃO O FLUXO DEFINIDO POR
(EH) PRESERVA VOLUME. (ASSUMINDO
QUE
TODA SOLUÇÃO
DE EH ESTÁ
DEFINIDA EM (R))

NÃO QUE SE

$H(q, p)$ É TAL QUE

$$\lim_{\|q\| \rightarrow +\infty} V(q) = +\infty.$$

ENTÃO TO DA SOLUÇÃO DE
(EH) ESTÁ DEFINIDA EM $\mathbb{R}$.

(13)

$H = T(q, \dot{p}) + V(q)$ $T(q, \dot{p})$ É UMA FORMA
QUADRÁTICA
DEFINIDA POSITIVA
EM $\dot{p}$.

NESTA SITUAÇÃO TEMOS AINDA QUE,
SE Ω É UM ABERTO LIMITADO. QUE
EXISTE $W = W(\Omega)$ ABERTO LIMITADO TAL
QUE $g_\tau(\Omega) \subset W, \forall \tau \in \mathbb{R}$.

ISTO É, DEVEMOS TOMAR

$$\bar{E} = \sup_{x \in \Omega} H(x)$$

$$W = \{(q, p) \mid H(q, p) \leq \bar{E}\}.$$

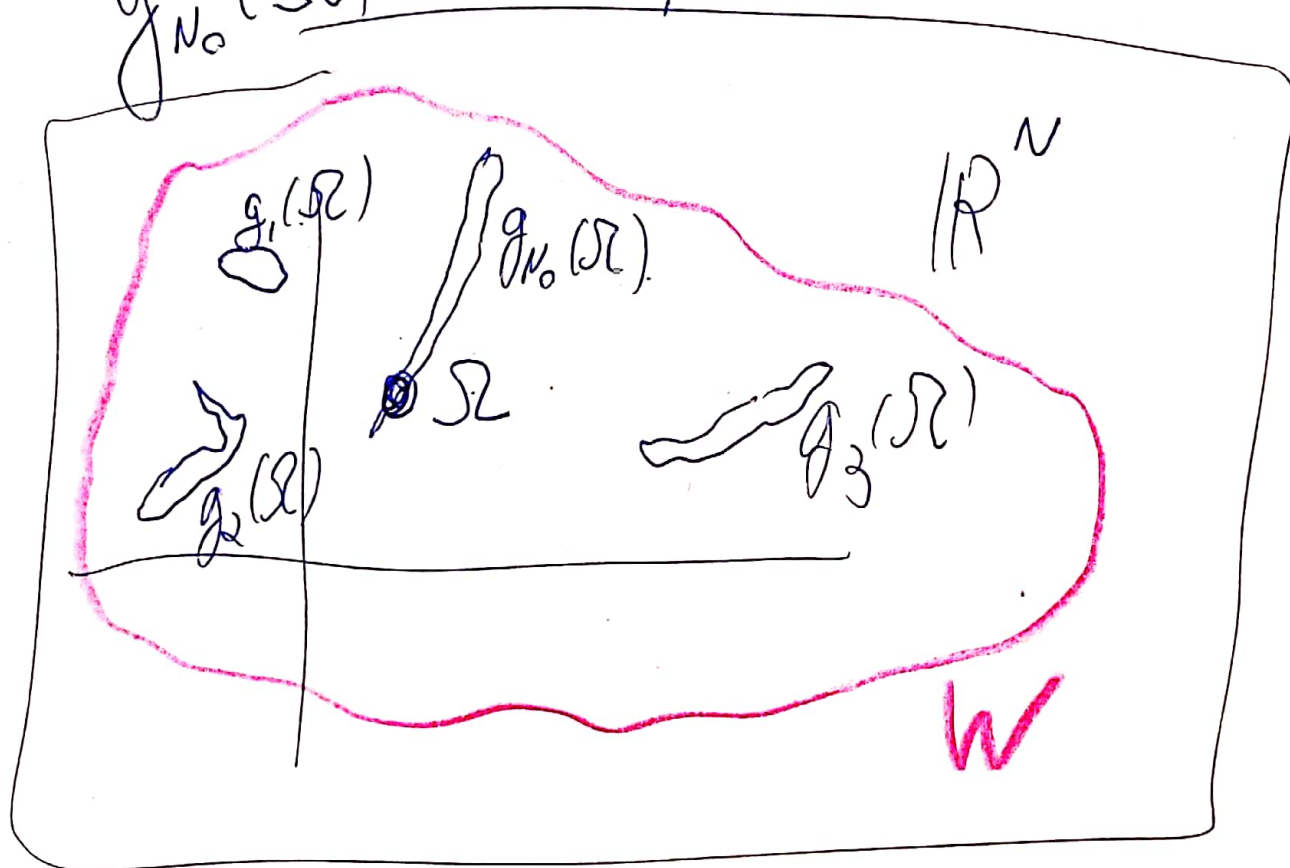
TEOREMA:

14

DADO H, Ω COMO ACIMA,

EXISTE $N_0 > 0$ TAL QUE $N_0 \in \mathbb{N}$.

$$g_{N_0}(\Omega) \cap \Omega \neq \emptyset.$$



DEM. TEMOS, PELO TEO LIOUVILLE, QUE.

$$\forall l \in \mathbb{N}, \chi(g_l(\Omega)) = \lambda(\Omega) > 0.$$

ALÉM DISSO EXISTE W ABERTO LIMITADO

TAL QUE $\lambda(W) < +\infty$ E $g_l(\Omega) \subset W$,
 $\forall l$.

Logo / SE

$$N_0 \equiv \left\lfloor \frac{\lambda(W)}{\lambda(\Omega)} \right\rfloor, \text{ NÃO PODEREMOS} \quad (15)$$

TER QUE

$\Omega, g_1(\Omega), g_2(\Omega) \dots, g_{N_0}(\Omega)$ SÊJAM.

2 A 2 DISTINTOS, CASO CONTRÁRIO.

$$\begin{aligned} \lambda(W) &\geq \lambda\left(\bigcup_{i=0}^{N_0} g_i(\Omega)\right) \stackrel{=}{=} \lambda(\Omega) \\ &= \sum_{i=0}^{N_0} \lambda(g_i(\Omega)) = \sum_{i=0}^{N_0} \lambda(\Omega) > \lambda(W) \end{aligned}$$

PORTANTO EXISTEM K, l COM.

$0 \leq K < l \leq N_0$ TAL QUE

$$g_K(\Omega) \cap g_l(\Omega) \neq \emptyset.$$

$$\Rightarrow g_{l-K}(g_K(\Omega) \cap g_l(\Omega)) \neq \emptyset.$$

$$\Rightarrow \Omega \cap g_{l-K}(\Omega) \neq \emptyset.$$