

MAT0315 - Um desafio

1. Prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots$$

é convergente.

2. Repare que $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{2}{3}$; $\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5}$; $\frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{3}{5} - \frac{4}{7}$

Prove que $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n-1} - \frac{n+1}{2n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Note também que $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right)$; $\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$; $\frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$

Prove que $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para determinar a soma da série, um estudante fez o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{7}\right) + \cdots \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}\right) + \cdots = 1 \end{aligned}$$

Outro estudante fez assim:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \cdots = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. Algum dos alunos calculou a soma corretamente? Por quê?
5. Qual é a soma da série?