Lista 9. Cadeias de Markov tempo contínuo I. (sexta 20/11/2020)

Exercício 1. Suponha, escolhemos $\tilde{v}, \tilde{P}$ para construir cadeia com tempo contínuo, mas a matriz $\tilde{P}$ é matriz qualquer qualquer estocástica (sem a restrição $p_{ii} = 0$). Supomos que existe algum estado k, tal que $\tilde{p}_{kk} > 0$. Observe que tal processo existe e vai ser processo markoviano, por causa da distribuição exponencial de tempo de permanência em estados.

Achar v, P da definição (construtiva) para cadeia de Markov construída com $\tilde{v}, \tilde{P}$.

Exercício 2. Considere processo de nascimento com taxa de nascimento linear. Cada indivíduo espera o tempo exponencial com a taxa λ para dar a luz um "filho" dele. Assim $\lambda_n = n\lambda, n > 0$, $\lambda_0 = \lambda$ e $\mu_n = 0, n \geq 0$. Esse processo é conhecido também como o processo do Yule, depois de G.Yule usa lo em teoria matemática da evolução.

1. Para esse processo achar a probabilidade $P_{03}(t)$.
2. Seja T_i instante quando o processo atinge primeira vez o estado i. Achar $\mathbb{E}(T_i)$.

Exercício 3. Seja X_n uma cadeia de Markov com espaço dos estados $\{0, 1, 2\}$, e supomos que estado 0 é estado absorvente. A cadeia é definida através de seguintes taxas de transições: $q_{10} = q_{20} = 1$ e $q_{12} = q_{21} = 2$. Seja T instante quando a cadeia atinge o estado absorvente. Achar a densidade de tempo T e $\mathbb{E}(T)$.

Exercício 4. Seja $X(t)$ cadeia de Markov com tempo contínuo dada pela matrix de taxas de transição (q_{ij}). Supondo que $X(0) = i$, mostre que qualquer que seja o estado i a probabilidade que durante o tempo h a cadeia fez pelo menos duas mudanças de estado é uma função $o(h)$. Mostre isso usando o fato que em cada estado a cadeia permanece o tempo exponencial.

Exercício 5. Uma população consiste em indivíduos de dois sexos - fêmeas e machos. Em uma colónia dessa população cada macho e fêmea formam um casal em intervalo h de tempo com probabilidade $\lambda h + o(h)$ e no mesmo instante eles produzem um indivíduo com a mesma probabilidade de ser macho ou fêmea. Cada organismo deixa a colónia durante tempo h com a probabilidade $\mu h + o(h)$. Sejam $N_1(t)$ e $N_2(t)$ número de machos e fêmeas respectivamente dentro da colónia em instante t. Construir a cadeia de Markov com tempo contínuo que descreve a evolução dessa colónia (achar as taxas de transição).

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.