AULAS ANTERIORES

20/11/2020

Autovalores e Autovetores:

Dado um OL $T: V \to V$, no caso em que $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

autovalor

autovetor associado ao autovalor λ

Autovalores: EC: $\det(A - \lambda I) = 0$

Autovetores: SLH: $(A - \lambda_i I)\vec{v_i} = \vec{0}$

Polinômio Mínimo:

- Mesmas raízes do PC, não necessariamente com a mesma ma(·).
- Polinômio que anula a matriz A do OL: $m(A) = 0$. → matriz nula
- PC é candidato a PM, pois anula A.
- PM é o de menor grau entre aqueles que anulam A.

Base de Autovetores:

Base de um EV V formada por autovetores todos LI, associados ou não a autovalores todos distintos.

Operador Diagonalizável:

Um OL $T: V \to V$ é diagonalizável $\Leftrightarrow \exists$ base de autovetores.

- $[T]_B$ ... matriz do OL na base B: $[T]_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

n. vezes que λ_i aparece na diagonal = n. autovetores LI associados a ele

$$p(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2 (\lambda - \beta)^3 (\lambda - \gamma)^3 (\lambda - \delta)^4$$

$$m(x) = (x - \alpha)^1 (x - \beta)^1 (x - \gamma)^1 (x - \delta)^1 \to m(A) = O_{12 \times 12}$$

Aplicação: Diagonalização de Operadores

$\downarrow$

Solução de Sistemas de EDOs Lineares Homogêneas de 1ª Ordem

$[T]_C$, de ordem n

Se o sistema de EDOs for do tipo: $\dot{F} = A\,F$

vetor de derivadas de 1a ordem

vetor de funções (soluções buscadas)

A solução geral será da forma:

$$F = F(t) = c_1 F_1(t) + \dots + c_n F_n(t) \quad , \; c_i \dots \text{ constantes}$$

tal que:

diagonalizável

$$F_i(t) = \vec{v}_i \, e^{\lambda_i t} \quad \text{desde que} \quad \begin{cases} \lambda_i \dots \text{ autovalor de } A \\ \vec{v}_i \dots \text{ autovetor associado a } \lambda_i \end{cases}$$

soluções independentes

A diagonalizável $\longrightarrow$ $\exists$ base autovetores $<$ autovalores todos distintos / PM de A

O que acontece se os autovalores de A não forem todos distintos?

$\downarrow$

A diagonalizável

$\downarrow$

$\exists$ base autovetores

$\downarrow$

$\exists$ n. soluções independentes necessárias *

para compor a solução geral

* n. soluções independentes = ordem de A

Slide 09 - Aplicações

1) Solução Geral $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 4x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 \end{cases}$

Sistema de EDOs lineares homogêneas de 1ª ordem

Na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X} \longrightarrow \boxed{\dot{X} = AX} \quad X = X(t)$$

Para sistemas de EDOs desse tipo, se a matriz A for diagonalizável, as soluções independentes serão do tipo

$$X_i(t) = \vec{v}_i \, e^{\lambda_i t} \begin{cases} \lambda_i \ldots \text{ autovalor de } A \\ \vec{v}_i \ldots \text{ autovetor associado a } \lambda_i \end{cases}$$

A solução geral será $X = X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, cujos elementos são as funções que solucionam o sistema.

A matriz A é diagonalizável?

Autovalores: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$

$EC: p(\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -1 \ ; \ \lambda_2 = 2$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\exists \ \underline{\underline{2}}$ autovetores LI; $A_{2\times 2}$, então $\dim(V) = 2$.

Portanto, $\exists$ uma base de autovetores e A é diagonalizável.

Assim, $\exists$ soluções independentes $X_1(t)$ e $X_2(t)$ tal que a solução geral é CL delas:

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) \quad , \quad c_1, c_2 \ldots \text{ constantes}$$

Autovetores: SLH : $(A - \lambda_i I)\,\vec{v_i} = \vec{0}$, $\vec{v_i} = (x, y)$

$$\lambda_1 = -1 \longrightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow X_1 = \vec{v_1}\, e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \text{ é uma solução}$$

$$\lambda_2 = 2 \longrightarrow \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow X_2 = \vec{v_2}\, e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} \text{ é a outra solução}$$

Escrevendo $X = X(t)$ como CL das soluções independentes X_1 e X_2:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_1 e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

E a solução geral do sistema de EDOs é:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{2t} \\ x_2(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \end{cases} \quad , \quad c_1, c_2 \ldots \text{ constantes}$$

* Se $\boxed{\begin{matrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{matrix}}$ forem conhecidas, tem-se um PVI.

Condições iniciais

2) PVI $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4z \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + 4z \\ \dfrac{dz}{dt} = -z \end{cases}$; $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.

Sistema de EDOs lineares homogêneas de 1ª ordem

Na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}}_{\dot{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{F} \longrightarrow \dot{F} = AF \qquad F = F(t)$$

Para sistemas de EDOs desse tipo, se a matriz A for diagonalizável, as soluções independentes serão do tipo

$$F_i(t) = \vec{v_i}\, e^{\lambda_i t} \quad \begin{cases} \lambda_i \ldots \text{ autovalor de } A \\ \vec{v_i} \ldots \text{ autovetor associado a } \lambda_i \end{cases}$$

A solução geral será $F = F(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$, cujos elementos são as funções que solucionam o sistema.

A matriz A é diagonalizável?

Autovalores: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)^{2}(\lambda + 1)$ $\longrightarrow m_a(\lambda_1) = 2$

EC: $p(\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = -1$

Candidatos a PM: $m_1(x) = -(x-2)(x+1)$ $\longrightarrow$ Se $m_1(A) = 0_{3\times3}$, então A será diagonalizável

$m_2(x) = -(x-2)^2(x+1)$

$$m_1(A) = -(A-2I)(A+I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $m_1(A) = 0_{3\times3}$, A é diagonalizável. Então $\exists$ uma base de autovetores e as soluções independentes $F_1(t)$, $F_2(t)$ e $F_3(t)$, tal que a solução geral é CL delas:

$$F(t) = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) + c_3 F_3(t), \quad c_i \ldots \text{constantes}$$

Lembrando: $ma(\lambda_1) = 2$ e $\exists$ base de autovetores, portanto, há 2 vetores LI associados a λ_1 ($ma \geq mg$ e $ma = mg$ quando A é diagonalizável).

Autovetores: SLH: $(A - \lambda_i I)\vec{v_i} = \vec{0}$

2 vetores LI

$$\lambda_1 = 2 \longrightarrow \vec{v} = (x, y, 0) = x(1,0,0) + y(0,1,0) \left\{ \begin{array}{l} \vec{v_1} = (1,0,0) \\ \vec{v_2} = (0,1,0) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 4z = 0 \\ -4z = 0 \\ -3z = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \longrightarrow \vec{u} = z\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right) \xrightarrow{z=3} \vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Soluções Independentes:

$$F_1 = \vec{v_1} e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$F_2 = \vec{v_2}\, e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$F_3 = \vec{u}\, e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Escrevendo $F = F(t)$ como CL das soluções independentes:

$$F(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) + c_3 F_3(t)$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4c_3 e^{-t} \\ -4c_3 e^{-t} \\ 3c_3 e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} + 4c_3 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} - 4c_3 e^{-t} \\ 3c_3 e^{-t} \end{bmatrix}$$

E a solução geral do sistema de EDOs é:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + 4c_3 e^{-t} \\ y(t) = c_2 e^{2t} - 4c_3 e^{-t} \\ z(t) = 3c_3 e^{-t} \end{cases}, \quad c_i \ldots \text{ constantes}$$

Aplicando as condições iniciais do PVI, encontram-se as constantes:

$$\begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 2 \end{matrix} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} c_1 + 4c_3 = 0 \\ c_2 - 4c_3 = 1 \\ 3c_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} c_1 = -8/3 \\ c_2 = 11/3 \\ c_3 = 2/3 \end{matrix}$$

Desta forma, a solução do PVI é:

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{8}{3}e^{2t} + \dfrac{8}{3}e^{-t} \\ y(t) = \dfrac{11}{3}e^{2t} - \dfrac{8}{3}e^{-t} \\ z(t) = 2e^{-t} \end{cases}$$