

Aula 9. Cadeias de Markov com tempo contínuo I (Exercícios).

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Definição de processo com tempo contínuo (construtivo).

Construimos a cadeia de seguinte modo: $\{X(t)\}$ chama-se cadeia de Markov, se

1. tempo que a cadeia fica em estado i tem a distribuição exponencial com a taxa v_i ;
2. quando a cadeia saia do estado i a escolha do outro estado ocorre com a probabilidade p_{ij} , onde $i \neq j$, e para cada estado i a soma $\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1$, e $p_{ii} = 0$.

Então, para definir a cadeia de Markov tempo contínuo basta para cada estado da cadeia $i \in E$ definir o número positivo v_i (taxa de cadeia permanecer em estado i) e matriz de transição $P = (p_{i,j})$ com restrição adicional $p_{i,i} = 0$ para todo $i \in E$ (e, claro, distribuição inicial):

$$v = (v_i), \quad P = (p_{ij})$$

**Observação sobre condição $p_{ii} = 0$.
Exercício 1 para Lista 9.**

Suponha, escolhemos $\tilde{v}, \tilde{P}$ para construir cadeia com tempo contínuo, mas a matriz $\tilde{P}$ é matriz qualquer qualquer estocástica (sem a restrição $p_{ii} = 0$). Supomos que existe algum estado k , tal que $\tilde{p}_{kk} > 0$. Observe que tal processo existe e vai ser processo markoviano, por causa da distribuição exponencial de tempo de permanência em estados.

Achar v, P da definição (construtiva) para cadeia de Markov construída com $\tilde{v}, \tilde{P}$.

Observação: propriedades infinitesimais.

Para cadeia de Markov homogênea $X(t)$ com tempo contínuo seja $P_{ij}(t) = P(X(s+t) = j \mid X(s) = i)$. Observem que seguintes relações são validas:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = v_i, \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = v_i p_{ij} \quad \text{quando } i \neq j$$

Observe, que por causa de tempo exponencial, a probabilidade de que ocorre mais de um evento durante $(0, h]$ é $o(h)$. A probabilidade de que durante tempo $(0, h]$ a cadeia vai sair de um estado i é $1 - e^{-v_i h} = v_i h + o(h)$. Assim, $1 - P_{ii}(h) = v_i h + o(h)$, o que justifica primeiro limite. E para justificar o segundo basta observar que $P_{ij}(h)$ é produto de probabilidade de que cadeia saiu de estado, $v_i h + o(h)$, vezes a probabilidade que ela escolheu o estado j , p_{ij} , e logo $P_{ij}(h) = h v_i p_{ij} + o(h)$.

Taxas de transição.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = v_i, \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = v_i p_{ij} \equiv q_{ij} \quad \text{quando } i \neq j$$

Com essa anotação temos:

$$v_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} \quad p_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sum_{j \neq i} q_{ij}}.$$

O que significa que podemos definir a cadeia através de matriz de taxas de transição

$$(q_{ij}, ij \in E), \text{ em que } q_{ii} = 0, \sum_{j \neq i} q_{ij} < \infty \quad \forall i \in E.$$

Por exemplo em caso de processo de nascimento e morte:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i, & \text{se } j = i + 1 \\ \mu_i, & \text{se } j = i - 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Nascimento e morte: média de tempo de acerto de nível.

Consideramos um processo de nascimento e morte geral, $X(t)$, com as taxas de transição λ_n, μ_n ; em que supomos que $\mu_0 = 0$. Supomos que o processo começa evoluir em tempo do estado i , seja $T_i = \min\{t > 0 : X(t) = i + 1\}$. Estabelecemos aqui uma formula recursiva para calcular $\mathbb{E}(T_i)$.

Primeiramente observamos que $\mathbb{E}(T_0) = 1/\lambda_0$.

Para $i > 0$ primeiro calcularemos as médias condicionando pelo primeiro passo: $I_i = 1$ caso primeiro passo foi $i \rightarrow i + 1$ e $I_i = -1$ caso primeiro passo foi $i \rightarrow i - 1$; variável I_i é nada mais como incremento do primeiro passo.

$$\mathbb{E}(T_i) = \mathbb{E}(T_i \mid I_i = 1)\mathbb{P}(I_i = 1) + \mathbb{E}(T_i \mid I_i = -1)\mathbb{P}(I_i = -1)$$

$$\mathbb{E}(T_i \mid I_i = 1) = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i},$$

$$\mathbb{E}(T_i \mid I_i = -1) = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{E}(T_{i-1}) + \mathbb{E}(T_i).$$

Nascimento e morte: média de tempo de acerto de nível.

Assim, logo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_i) &= \mathbb{E}(T_i \mid I_i = 1)\mathbb{P}(I_i = 1) + \mathbb{E}(T_i \mid I_i = -1)\mathbb{P}(I_i = -1) \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} + \left(\frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{E}(T_{i-1}) + \mathbb{E}(T_i) \right) \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \left(\mathbb{E}(T_{i-1}) + \mathbb{E}(T_i) \right) \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{E}(T_i) = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} \mathbb{E}(T_{i-1}).$$

Nascimento e morte: média de tempo de acerto de nível. Caso particular.

Consideramos um caso particular: seja $\lambda_n \equiv \lambda$ e $\mu_n \equiv \mu$. Neste caso conseguimos a formula fechada para $E(T_i)$. A formula recursiva possui neste caso seguinte forma:

$$\mathbb{E}(T_i) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} \mathbb{E}(T_{i-1}) = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \mu \mathbb{E}(T_{i-1}) \right).$$

**Nascimento e morte: média de tempo de acerto de nível.
Caso particular.**

Começando com

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_1) &= \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) \\ \mathbb{E}(T_2) &= \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^2 \right) \\ &\vdots \\ \mathbb{E}(T_i) &= \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^i \right) \\ &= \frac{1 - (\mu/\lambda)^{i+1}}{\lambda - \mu}, \quad i \geq 0 \text{ and } \lambda \neq \mu; \\ &= \frac{i+1}{\lambda}, \quad i \geq 0 \text{ and } \lambda = \mu;\end{aligned}$$

Nascimento e morte: média de tempo de acerto de nível. Caso particular.

Observação: caso quando queremos achar a média do tempo $T_{i \rightarrow j}$, quando $j > i$, então

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(T_{i \rightarrow j}) &= \sum_{n=i}^{j-1} \mathbb{E}(T_n) = \sum_{n=i}^{j-1} \frac{1 - (\mu/\lambda)^{n+1}}{\lambda - \mu} \\
 &= \frac{j-i}{\lambda - \mu} - \frac{(\mu/\lambda)^{i+1}}{\lambda - \mu} \cdot \frac{1 - (\mu/\lambda)^{j-i}}{1 - \mu/\lambda} \text{ quando } 0 \leq i < j \text{ and } \mu \neq \lambda \\
 &= \frac{j(j+1) - i(i+1)}{2\lambda} \text{ quando } 0 \leq i < j \text{ and } \mu = \lambda.
 \end{aligned}$$

**Nascimento e morte: média de tempo de acerto de nível.
Caso particular. Variância de momentos de acertos.**

Calcularemos aqui a variância de $T_{0 \rightarrow j}$, lembrando que pela definição $T_{0 \rightarrow j} = \min\{t : X(t) = j \mid X(0) = 0\}$, e pode ser representada como a soma $T_{0 \rightarrow j} = \sum_{k=0}^{j-1} T_k$, definidos em cima. Notamos que a equação

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_i \mid I_i = 1) &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i}, \\ \mathbb{E}(T_i \mid I_i = -1) &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{E}(T_{i-1}) + \mathbb{E}(T_i),\end{aligned}$$

pode ser re-escrita de seguinte maneira:

$$\mathbb{E}(T_i \mid I_i) = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{1 - I_i}{2} \cdot (\mathbb{E}(T_{i-1}) + \mathbb{E}(T_i))$$

Para achar a variância, temos que achar

$$\text{Var}(\mathbb{E}(T_i \mid I_i)) \text{ e } \mathbb{E}(\text{Var}(T_i \mid I_i)).$$

**Nascimento e morte: média de tempo de acerto de nível.
Caso particular. Variância de momentos de acertos.**

$$\mathbb{E}(T_i | I_i) = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{1 - I_i}{2} \cdot (\mathbb{E}(T_{i-1}) + \mathbb{E}(T_i))$$

logo calculamos a variância dessa esperança condicional

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar(\mathbb{E}(T_i | I_i)) &= \mathbb{V}ar\left(\frac{1 - I_i}{2}\right) (\mathbb{E}(T_{i-1}) + \mathbb{E}(T_i))^2 \\ &= \frac{\lambda_i \mu_i}{(\lambda_i + \mu_i)^2} (\mathbb{E}(T_{i-1}) + \mathbb{E}(T_i))^2\end{aligned}$$

onde usamos

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar\left(\frac{1 - I_i}{2}\right) &= \frac{1}{4} \mathbb{V}ar(I_i) = \frac{1}{4} (\mathbb{E}(I_i^2) - (\mathbb{E}(I_i))^2) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{\lambda_i - \mu_i}{\lambda_i + \mu_i}\right)^2\right) = \frac{\lambda_i \mu_i}{(\lambda_i + \mu_i)^2}.\end{aligned}$$

**Nascimento e morte: média de tempo de acerto de nível.
Caso particular. Variância de momentos de acertos.**

Agora acharemos $\mathbb{E}(\mathbb{V}ar(T_i | I_i))$. Do mesmo modo, seja X_i é tempo de permanência em estado i até momento de transição, então

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar(T_i | I_i = 1) &= \mathbb{V}ar(X_i | I_i = 1) = \mathbb{V}ar(X_i) = \frac{1}{(\lambda_i + \mu_i)^2} \\ \mathbb{V}ar(T_i | I_i = -1) &= \mathbb{V}ar(X_i + T_{i-1} + T_i) = \mathbb{V}ar(X_i) + \mathbb{V}ar(T_{i-1}) + \mathbb{V}ar(T_i) \\ &= \frac{1}{(\lambda_i + \mu_i)^2} + \mathbb{V}ar(T_{i-1}) + \mathbb{V}ar(T_i).\end{aligned}$$

Ambas formulas podem ser re-escritas em uma fórmula

$$\mathbb{V}ar(T_i | I_i) = \frac{1}{(\lambda_i + \mu_i)^2} + \frac{1 - I_i}{2} (\mathbb{V}ar(T_{i-1}) + \mathbb{V}ar(T_i)).$$

Logo,

$$\mathbb{E}(\mathbb{V}ar(T_i | I_i)) = \frac{1}{(\lambda_i + \mu_i)^2} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} (\mathbb{V}ar(T_{i-1}) + \mathbb{V}ar(T_i)).$$

**Nascimento e morte: média de tempo de acerto de nível.
Caso particular. Variância de momentos de acertos.**

Finalizando, obtemos seguinte fórmula recursiva:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}ar(T_i) &= \mathbb{V}ar(\mathbb{E}(T_i \mid I_i)) + \mathbb{E}(\mathbb{V}ar(T_i \mid I_i)) \\
 &= \frac{\lambda_i \mu_i}{(\lambda_i + \mu_i)^2} \left(\mathbb{E}(T_{i-1}) + \mathbb{E}(T_i) \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{(\lambda_i + \mu_i)^2} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \left(\mathbb{V}ar(T_{i-1}) + \mathbb{V}ar(T_i) \right) \\
 &= \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i + \mu_i)} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} \mathbb{V}ar(T_{i-1}) + \frac{\lambda_i \mu_i}{(\lambda_i + \mu_i)^2} \left(\mathbb{E}(T_{i-1}) + \mathbb{E}(T_i) \right)^2
 \end{aligned}$$

lembrando, que $\mathbb{V}ar(T_0) = \frac{1}{\lambda_0}^2$, recursivamente podemos obter todos os valores de $\mathbb{V}ar(T_i)$.

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models*.
9th edition, Academic Press, 2007.