Aula 9. Cadeias de Markov com tempo contínuo I.

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Definição.

O conjunto de variáveis $\{X(t), t \geq 0\}$ com o espaço enumerável E dos estados, chama-se uma cadeia de Markov com o tempo contínuo, se para quaisquer $t > s > u \in \mathbb{R}_+ = [0.\infty)$

$$\mathbb{P}(X(t) = j \mid X(s) = i, X(u) = k) = \mathbb{P}(X(t) = j \mid X(s) = i).$$

Note, que a definição pode ser usada para caso do tempo discreto também. Nós continuamos usar a expressão "cadeia de Markov", pois a palavra "cadeia" reflete o fato que os estados (valores de variáveis $X(t)$) pertencem ao mesmo conjunto, e conjunto *enumerável*.

Probabilidade $\mathbb{P}(X(t) = j \mid X(s) = i)$ chama-se a probabilidade de transição, e vamos anotar ela como $p_{ij}(s,t)$. Caso a função $p_{ij}(s,t)$ depende do comprimento do intervalo do tempo $t - s$, neste caso a cadeia chama-se a cadeia *homogênea*.

Observação sobre classificação de estados.

Para cadeias de Markov com tempo contínuo, todas as classificações de estados que introduzimos para cadeias de Markov com tempo discreto (como estados acessíveis, comunicáveis, (positivo) recorrentes, transitórios ect) fazem sentido e podem ser repetidas ou/e adaptadas. Único (provavelmente) conceito que não vai manter o seu sentido é conceito da estado (cadeia) aperiódica.

Propriedade de falta da memória.

Supomos que a cadeia $X(t)$ esta em estado i em instante 0. Qual é a distribuição do tempo de cadeia permanecer neste estado, antes de mudar para o outro estado? Anotamos esse tempo T_i, e pela definição

$$T_i = \min\{t : \ X(t) \neq i \text{ dado } X(0) = i\}.$$

Provaremos que a distribuição desse tempo é exponencial. Para isso provamos que esse tempo satisfaz a condição de falta da memória.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T_i > t + s \mid T_i > s, \ X(0) = i) \\
&= \mathbb{P}(T_i > t + s \mid X(u) = i, 0 \leq u \leq s) \\
&= \mathbb{P}(T_i > t + s \mid X(s) = i) = \mathbb{P}(T_i > t \mid X(0) = i).
\end{aligned}$$

Definição alternativa (prática).

Podemos descrever agora a cadeia em outra maneira. $\{X(t)\}$ chama-se cadeia de Markov, se

1. tempo que a cadeia fica em estado i tem a distribuição exponencial com a taxa v_i;

2. quando a cadeia saia do estado i a escolha do outro estado ocorre com a probabilidade p_{ij}, onde $i \neq j$, e para cada estado i a soma $\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1$, e $p_{ii} = 0$.

Então, para definir a cadeia de Markov tempo contínuo basta para cada estado da cadeia $i \in E$ definir o número positivo v_i (taxa de cadeia permanecer em estado i) e matriz de transição $P = (p_{i,j})$ com restrição adicional $p_{i,i} = 0$ para todo $i \in E$ (e, claro, distribuição inicial)

$$v = (v_i) \quad P = (p_{i,j})$$

Cadeia embutida.

Definimos uma cadeia de Markov com tempo contínuo com basta para cada estado da cadeia $i \in E$ definir o número positivo v_i (taxa de cadeia permanecer em estado i) formando vetor $v = (v_i)$ e matriz de transição $P = (p_{i,j})$ com restrição adicional $p_{i,i} = 0$ para todo $i \in E$ (e, claro, distribuição inicial).

Seja $T_1 < T_2 < \cdots < T_n < \ldots$ instantes quando a cadeia $X(t)$ altera o seu estado (pula, muda estado). Consideramos variáveis $X_n = X(T_n)$. A sequencia X_n forma uma cadeia de Markov com as probabilidades de transições p_{ij}. A sequência X_n forma uma cadeia de Markov (com tempo discreto) e chama-se cadeia *embutida*.

Exemplo 1. Processo de nascimento e morte.

Consideramos uma cadeia com conjunto de estados $\mathbb{N}$, que vai ser interpretada como o número de indivíduos (pessoas, partículas, ect) em um sistema (pode ser sistema de filas). Se a cadeia está em estado n (número de indivíduos no sistema é igual à n), então

1. um novo indivíduo aparece no sistema com a taxa exponencial λ_n (taxa de chegada ou taxa de nascimento);

2. um indivíduo deixa o sistema com a taxa exponencial μ_n (taxa de partida, ou taxa de morte).

Em termos $\{v_i\}$ e $\{p_{ij}\}$:

$$v_0 = \lambda_0, \; v_i = \lambda_i + \mu_i$$
$$p_{01} = 1, \; p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, \; p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

Exemplo 2. Processo de Poisson é cadeia de Markov com tempo contínuo - como processo de nascimento e morte.

Para o processo de Poisson, é fácil ver que $v_i = \lambda$ e $p_{ij} = 1$ se $j = i + 1$ e $p_{ij} = 0$ caso contrario. Para o processo de Poisson sabemos também que $p_{ij}(t) = (\lambda t)^{|j-i|} e^{-\lambda t}/(j-i)!$.

A cadeia embutida para processo de Poisson é trivial. As transições $i \to i+1$ ocorrem com a probabilidade 1.

Observe, que processo de Poisson é processo de nascimento e morte com $\lambda_n = \lambda$ e $\mu_n = 0$.

Exemplo 2.1. Processo de nascimento com taxa de nascimento linear.

Cada indivíduo espera o tempo exponencial com a taxa λ para dar a luz um “filho” dele. Assim $\lambda_n = n\lambda, n \geq 0$. Esse processo é conhecido também como o processo do Yule, depois de G.Yule usar ele em teoria matemática da evolução.

Exemplo 2.2. Modelo de crescimento linear com imigração.

Neste caso $\mu_n = n\mu$, $n \geq 1$ e $\lambda_n = n\lambda + \theta$, $n \geq 0$. Seja $X(t)$ tamanho de população em instante t. Vamos achar neste caso o tamanho médio de população $m(t) = \mathbb{E}(X(t))$. Vamos derivar a equação para $m(t)$. Para isso consideramos o incremento da media em pequeno lapso de tempo h; o que pode ocorrer durante este tempo?

$$X(t+h) = \begin{cases} X(t) + 1, & \text{com prob. } (\theta + \lambda X(t))h + o(h) \\ X(t) - 1, & \text{com prob. } X(t)\mu h + o(h) \\ X(t), & \text{com prob. } 1 - (\theta + \lambda X(t) + \mu X(t))h + o(h) \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(X(t+h) \mid X(t)) = X(t) + (\theta + \lambda X(t) - \mu X(t))h + o(h) \\ &m(t+h) = m(t) + (\lambda - \mu)m(t)h + \theta h + o(h) \\ &\Leftrightarrow \frac{m(t+h) - m(t)}{h} = (\lambda - \mu)m(t) + \theta + \frac{o(h)}{h} \\ &\Leftrightarrow m'(t) = (\lambda - \mu)m(t) + \theta \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Modelo de crescimento linear com imigração.

Resolvemos $m'(t) = (\lambda - \mu)m(t) + \theta$:

Seja $h(t) = (\lambda - \mu)m(t) + \theta$. Se $m(t)$ satisfaz equação, então $h(t)$ vai satisfazer a equação $h'(t)/(\lambda - \mu) = h(t)$ e a integração vai dar $\log(h(t)) = (\lambda - \mu)t + c$ ou $h(t) = Ke^{(\lambda-\mu)t}$. Para achar K colocaremos condição inicial: $m(0) = i$. O que vai dar $K = \theta + (\lambda - \mu)i$ assim

$$m(t) = \frac{\theta}{\lambda - \mu}(e^{(\lambda-\mu)t} - 1) + ie^{(\lambda-\mu)t}$$

se $\lambda = \mu$ então $m'(t) = \theta$ e

$$m(t) = \theta t + i.$$

Exemplo 2.3. (M/M/1).

$$\mu_n = \mu,\ n \geq 1, \quad \lambda_n = \lambda,\ n \geq 0.$$

Exemplo 2.4. (M/M/s).

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq s \\ s\mu, & n > s \end{cases} \qquad \lambda_n = \lambda,\ n \geq 0.$$

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 9th edition, Academic Press, 2007.