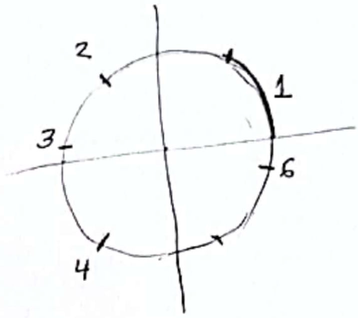
Definição Uma série $\sum a_n$ é **absolutamente convergente** se $\sum |a_n|$ for convergente.



Exemplo 1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} k}{k^2} \right|$$

$$\left| \frac{\operatorname{sen} k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ é convergente (p-série com $p=2$)

Pelo Critério da comparação, $\displaystyle\sum \frac{|\operatorname{sen} k|}{k^2}$ é convergente.

Logo, a série $\displaystyle\sum \frac{\operatorname{sen} k}{k^2}$ é absolutamente convergente.

Teorema 1. Se $\sum |a_n|$ converge então $\sum a_n$ também converge.

Equivalentemente: Toda série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração

$$0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n| \quad , \forall n.$$

Como ~~se~~ $\sum |a_n|$ é convergente, $\sum 2|a_n|$ é convergente

Pelo Critério da Comparação, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} [|a_n| + a_n] \text{ é convergente.}$$

Como

$$a_n = [a_n + |a_n|] - |a_n|$$

e como $\sum (a_n + |a_n|)$ e $\sum |a_n|$ são ambas convergentes, temos

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

Logo $\sum a_n$ converge.

Exemplo 2 Decida se a série

$$1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \frac{16}{81} - \cdots$$

é convergente.

A série dos módulos é

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{série geométrica de razão } \frac{2}{3} \; (<1)}$$

Logo, converge.

Pelo Teorema 1, a série original é convergente.

Exemplo 3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ (Harmônica alternada)

(Vimos, pelo C. das Séries Alternadas, que esta série é convergente)

Por outro lado,

$\sum \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ (série harmônica)

é divergente.

Definição. Se uma série é convergente mas não é absolutamente convergente, dizemos que ela é condicionalmente convergente.

Muito cuidado com elas!

Sabe-se que

$\ln 2 = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cancel{\frac{1}{6}} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$

$\frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$

$\frac{1}{2} \ln 2 = 0 + \cancel{\frac{1}{2}} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \cancel{\frac{1}{6}} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} - \dots$

$$\frac{3}{2} \ln 2 = \underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots}_{\text{é um rearranjo da série harmônica alternada}}$$

Note que o resultado da soma é outro! (descoberto em 1837 por Johann Dirichlet)

$\sum a_n$.

Suponha $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijetora

$$b_n = a_{\varphi(n)}$$

A série $\sum b_n$ é um rearranjo da série $\sum a_n$.

($\sum b_n$ é uma série cujos termos são os mesmos que $\sum a_n$, mas em outra ordem)

$\sum b_n$ é uma reordenação da $\sum a_n$.

Exemplo. $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$

é uma reordenação da série harm. alternada.

Teorema 2. Se uma série $\sum a_n$ é absolutamente convergente então qualquer reordenação dela $\sum b_n$ é convergente e

$$\sum a_n = \sum b_n.$$

Teorema 3 (Riemann)

Se $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, dado um número $x \in \mathbb{R}$ qualquer, então existe uma reordenação $\sum b_n$ da série $\sum a_n$ cuja soma é x! ($\sum b_n = x$).

Exemplo 4: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ é $\begin{cases} \text{absolutamente conv?} & (\text{não}). \\ \text{condicionalmente conv?} \\ \text{divergente?} \end{cases}$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \right| = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$ é divergente (Já vimos)

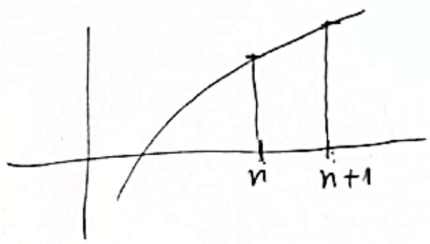
$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln(n)}$ é uma série alternada

Seja $a_n = \frac{1}{\ln(n)}$

(i) $(a_n)_n$ é decrescente?

(ii) $\lim a_n = 0$?

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$.



(ii) $\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln(n)}$, $\forall n$.

Logo (a_n) é decrescente.

Pelo Critério das Séries Alternadas

$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$ é convergente

Portanto, a série é <u>condicionalmente</u> convergente.

Exercícios

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$

(a) $\sum \left| \frac{(-10)^n}{n!} \right| = \sum \frac{10^n}{n!}$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0 \quad (<1)$$

Pelo Critério da Razão, a série dada é absolutamente convergente.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$ } cond. conv.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}$ } absol. conv.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{3})}{n!}$ } absol. conv.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1,1)^n}{n^4}$ Divergente

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ absolut. conv.