ESTABILIDADE DE EQUILÍBRIOS PARA SISTEMAS NÃO LINEARES

Vamos considerar agora a questão de estabilidade (local) de um equilíbrio para o sistema autônomo não linear:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

sendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(y) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ F_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ F_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

e $F_1, F_2, \cdots, F_n$ funções de clase C^1 em um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$.

Se $\mathbf{x}_0$ é um equiliíbrio de (1), e $\mathbf{x}(t)$ é outra solução, escrevendo $x(t) = x_0 + y(t)$, obtemos:
$\dot{y} = \dot{x} = F(x_0 + y(t)) = F(x_0) + DF(x_0) \cdot y(t) + G(y) = DF(x_0) \cdot y(t) + G(y)$. Ou seja, temos

$$\dot{y} = DF(x_0) \cdot y(t) + G(y) \tag{2}$$

sendo $DF(x_0)$ a diferencial de F no ponto x_0. $G(y)$ é $o(|y|)$ perto da origem, ou seja, temos a equação:

$$\lim_{|y| \to 0} \frac{|G(y))|}{|y|} = 0. \tag{3}$$

Date: November 24, 2020.

Vamos nos referir à equação (2) como a *aproximação linear* de (1) em torno do ponto de equilíbrio x_0. Queremos mostrar que, se os autovalores de $\mathbf{A} = DF(x_0)$ têm parte real negativa, então a origem é (localmente) assintoticamente estável para o sistema (2), de onde seguirá que o mesmo para o equilíbrio x_0 de (1). Para isto, vamos precisar do seguinte resultado importante.

Lema 1. *(Desigualdade de Gronwall) Seja K uma constante e u e v funções reais contínuas positivas definidas em um intervalo $[a,b]$ tais que*

$$u \leq K + \int_a^t u(s)\,v(s)\,d\,s$$

para todo $t \in [a,b]$. Então, para todo $t \in [a,b]$,

$$u \leq K e^{\int_a^t v(s)}\,d\,s.$$

Demonstração. Ver na aula gravada do dia 03/11.

Teorema 2. *Suponhamos que os autovalores da matriz $\boldsymbol{A} = DF(x_0)$ tenham todos parte real negativa. Então x_0 é um equilíbrio assintoticamente estável do problema (2).*

Demonstração. Basta mostrar que a origem é equilíbrio assintoticamente estável do problema (2). Seja $\sigma >$ tal que $-\sigma > Re(\lambda)$, para todo autovalor λ da matriz $\mathbf{A} = DF(x_0)$ e M uma constante tal que $\|e^{t\mathbf{A}}\| \leq Me^{-\sigma t}$, para todo $t > 0$. Dado $\epsilon > 0$, seja $0 < \rho < \epsilon$ tal que $\frac{g(|y|)}{|y|} < L < \frac{\sigma}{M}$ se $|y| \leq \rho$ e escolhemos $\delta \leq \epsilon$ tal que $M\delta \leq \rho$. Então, se $|y_0| \leq \delta$ e $y(t)$ é a solução de (2), com condição inicial y_0, temos, pela fórmula de variação das constantes:

$$y(t) = e^{t\mathbf{A}}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}}g(y(s))\,d\,s.$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e^{t\mathbf{A}}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}}g(y(s))\,d\,s \Rightarrow \\
|y(t)| &\le \|e^{t\mathbf{A}}\||y_0| + \int_0^t \|e^{(t-s)\mathbf{A}}\||g(y(s))|\,d\,s \Rightarrow \\
|y(t)| &\le Me^{-t\sigma}|y_0| + \int_0^t Me^{-(t-s)\sigma}|(y(s)|\,d\,s \Rightarrow \\
e^{t\sigma}|y(t)| &\le M|y_0| + \int_0^t Me^{(s)\sigma}L|(y(s)|\,d\,s.
\end{aligned}
$$

Do Lema de Gronwall, segue que

$$e^{t\sigma}|y(t)| \le M|y_0|e^{MLt} \Rightarrow |y(t)| \le M|y_0|e^{(ML-\sigma)t},$$

para todo $t > 0$ no domínio maximal da solução $y(t)$. Segue que a solução está definida para todo $t \ge 0$ e

$$|y(t)| < \rho < \epsilon, \text{ para todo } t \ge 0.$$

□

Observação 3. *Se matriz $DF(x_0)$ tem todos os seus autovalores com parte real positiva, então não é difícil provar que x_0 é instável (Dica: defina $y(t) = x(-t)$ e observe que y satisfaz a equação $\dot{y} = -F(y)$). Se $DF(x_0)$ possui alguns autovalores com parte real positiva ainda se pode provar que o equilíbrio x_0 é instável, mas a demonstração é mais difícil e não será feita aqui. Vamos apenas enunciar o resultado no caso do plano, para uso futuro.*

Teorema 4. *Consideremos o sistema no plano*

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}), \tag{4}$$

sendo

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad e \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{z}) \\ g(\boldsymbol{z}) \end{bmatrix}$$

Seja $\boldsymbol{z}_0$ *um ponto de equilíbrio e* λ_1 *e* λ_2 *os autovalores* $\boldsymbol{A} = D\boldsymbol{F}(z_0)$ *(eventualmente iguais). Então temos:*

(1) *Se* λ_1 *e* λ_2 *têm ambos parte real negativa, então* $\boldsymbol{z}_0$ *é um equilíbrio (localmente) assintoticamente estável.*

(2) *Se* λ_1 *e* λ_2 *têm ambos parte real positiva, então existe* $\epsilon > 0$ *tal que, se* $|\boldsymbol{z}_0 - \boldsymbol{z}| < \epsilon$ *então a solução* $\phi(t, \boldsymbol{z})$ *de* (4) *com condição inicial* $\boldsymbol{z}$ *satisfaz* $\lim_{t\to-\infty} \phi(t, \boldsymbol{z}) \to 0 = \boldsymbol{z}_0$*. Em particular,* $\boldsymbol{z}_0$ *é equilíbrio instável.*

(3) *Se* $Re(\lambda_1) < 0$ *e* $Re(\lambda_2) > 0$*, então existem curvas* γ_1 *e* γ_2 *passando por* $\boldsymbol{z}_0$ *tais que:*

   (a) *Se* $\boldsymbol{z} \in \gamma_1$ *então a solução* $\phi(t, \boldsymbol{z})$ *de* (4) *com condição inicial* $\boldsymbol{z}$ *satisfaz* $\lim_{t\to\infty} \phi(t, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}_0$.

   (b) *Se* $\boldsymbol{z} \in \gamma_2$ *então a solução* $\phi(t, \boldsymbol{z})$ *de* (4) *com condição inicial* $\boldsymbol{z}$ *satisfaz* $\lim_{t\to-\infty} \phi(t, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}_0$.

   Em particular, $\boldsymbol{z}_0$ *é um equilíbrio instável.*

Observação 5. *Se os autovalores do sistema* (2) *têm todos parte real não nula, dizemos que o ponto de equilíbrio é* ***hiperbólico****. O que o Teorema 4 afirma, no caso de um sistema no plano, é que as propriedades de estabilidade e instabilidade de equilíbrios são as mesmas de sua* aproximação linear*. De fato, o mesmo vale para sistemas em n variáveis.*

Exemplo 6. *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 sen\ x - \gamma y \end{cases} \tag{5}$$

que descreve a equação do pêndulo com atrito.

Os equilíbrios de (5) *são os pontos da forma* $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. *A diferencial de* $F(x, y) = (y, -\omega^2 sen\ x - \gamma y)$ *na origem* $k = 0$ *é:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{bmatrix}$$

A diferencial no ponto $(\pi, 0)$ *é:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\gamma. \end{bmatrix}$$

No primeiro caso, os autovalores têm ambos parte real negativa e, portanto, a origem é um ponto crítico estável. No segundo caso, temos um dos autovalores com parte real negativa e outro com parte real negativa. Portanto, a origem é um ponto crítico instável

O Teorema 4 nada afirma no caso de equilíbrios não hiperb0́licos. De fato, nesse caso, a propriedade de estabilidade (ou instabilidade) do sistema não linear não podem ser determinados pela sua aproximação linear.

Exemplo 7.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = x - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \tag{6}$$

Nesse caso, a origem é um centro para a aproximação linear e uma espiral assintoticamente estável para o não linear.

Exemplo 8.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) sen\ \left(\frac{\pi}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) sen\ \left(\frac{\pi}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right) \end{cases} \tag{7}$$

Nesse caso, a origem é um centro para a aproximação linear, portanto estável mas não assintoticamente estável e o mesmo ocorre para o não linear.