Conjuntos finitos - propriedades
(e um pouquinho sobre infinitos)

· Lembrando:

Def: Um conjunto S é dito finito se $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $|S| = |n|$.

· Podemos então definir:

Def: Se S é finito e $n \in \mathbb{N}$ é tal que $|S| = |n|$, dizemos que S tem n elementos e escreveremos $|S| = n$ (lê-se: "cardinalidade de S igual a n").

Obs: $|n| = n$

· Precisamos mostrar que $|S| = n$ está bem definido, ou seja, que é único. Isso será uma das consequências do próximo lema:

Lema: Se $n \in \mathbb{N}$ e $A \subsetneq n$, então $\nexists f: n \to A$ bijetora.

Dem:

Vamos mostrar por indução em n, tomando

$P(n): A \subsetneq n \to \nexists f: n \to A$ bijetora.

· $n = 0$: Não existe $A \subsetneq 0 = \emptyset$, logo $P(0)$ vale trivialmente.

• $P(n) \to P(n+1)$:

Suponha $P(n)$, ou seja, que $A \subsetneq n \to \nexists\, f: n \to A$ bijetora

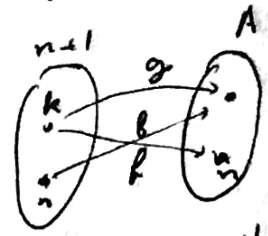
Por absurdo, suponha que $P(n+1)$ é falso, ou seja, que $\exists\, A \subsetneq n+1$ tal que $\exists\, f: n+1 \to A$ bijetora.

• Caso 1: $n \notin A$

Daí $A \subset n$. Mas teríamos então que $A \setminus \{f(n)\} \subsetneq n$ e que $f|_n : n \to A \setminus \{f(n)\}$ é bijetora, contra a Hip. de Ind. (aplicada a $A \setminus \{f(n)\}$)

• Caso 2: $n \in A$

Daí $n = f(k)$ para algum $k \in n+1$ (pois $f: n+1 \to A$ sobrej.)



Define $g: n \to A \setminus \{n\}$ por

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & \text{se } i \neq k,\ i < n \\ f(n) & \text{se } i = k \quad (\text{se } k < n) \end{cases}$$

(se $k = n$, def. $g(i) = f(i)\ \forall i < n$)

Daí $g: n \to A \setminus \{n\}$ é uma bijeção e $A \setminus \{n\} \subsetneq n$, (pois $A \subsetneq n+1$ e $n \in A$) contra a hip. de ind. (aplicada a $A \setminus \{n\}$).

O Lema segue então do P.I.F. //

• Consequências do Lema: Para $n, m \in \mathbb{N}$ vale:

1) $n \neq m \Rightarrow \nexists\, f: n \to m$ bijeção (i.e., $n < m \Rightarrow |n| < |m|$)

2) $|S| = n$ e $|S| = m \Rightarrow n = m$

3) B finito e $A \subsetneq B \Rightarrow \nexists\, f: A \to B$ bijeção

4) $\mathbb{N}$ é infinito

Dem., Exercício

Algumas propriedades de conjuntos finitos

- Apresentaremos aqui algumas propriedades básicas dos conjuntos finitos, a maioria das quais vocês já devem conhecer, se não todas. Só vou mostrar algumas, geralmente só dando uma ideia da demonstração, outras vão ficar como exercícios.

- Sejam X e Y conjuntos

1) X finito e $Y \subseteq X \Rightarrow Y$ finito e $|Y| \leq |X|$

<u>Ideia da dem</u>: X finito $\Rightarrow \exists f: X \to n$ bijeção pr algum $n \in \mathbb{N}$

$\therefore$ pode escrever $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

$Y \subseteq X \rightsquigarrow$ constrói (usando o Teorema da Recursão) $g: Y \to m$ bijetora procurando a cada passo o 1º $x_k \in Y$ não usado ainda //

2) X finito e f função com $\mathrm{Dom} f = X \Rightarrow f[X]$ finito e $|f[X]| \leq |X|$

<u>Ideia da dem</u>: Parecida com 1), também usa o Teorema da Recursão.

- As próximas duas propriedades nos dizem que uma união de uma quantidade finita de conjuntos finitos, é finita:

3) X, Y finitos $\Rightarrow X \cup Y$ finito e $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$

Esboço da dem:

$|X| = n \Rightarrow \exists f: n \to X$ bijetora

$|Y| = m \Rightarrow \exists g: m \to Y$ bijetora

Defina $h: n+m \to X \cup Y$ por

$h(i) = f(i)$ se $i < n$

$h(i) = g(i-n)$ se $i \geq n$, $i < m+n$

Basta agora verificar que h é sobrejetora. //

Obs: Se acima supormos X, Y tais que $X \cap Y = \emptyset$, teremos que $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ (exercício da Lista 5).

4) A união finita de conjuntos finitos é um conjunto finito (ou seja, se $\mathcal{C}$ é finito e $\forall X \in \mathcal{C}$ (X é finito), então $\bigcup \mathcal{C}$ é finito)

Dem: Exercício (da Lista 5). (Dica: Fazer por indução na $|\mathcal{C}|$)

5) X, Y finitos $\Rightarrow X \times Y$ finito e $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$

Dem: Exercício (também da Lista 5)

Obs: Sup. $|X| = m$ e $|Y| = n$. De 5) segue que $|X \times Y| = |m| \cdot |n| = m \cdot n$. Mas também, $|Y \times X| = |n| \cdot |m| = n \cdot m$. $\therefore m \cdot n = n \cdot m$ (assumindo $|X \times Y| = |Y \times X|$, que tbm é exercício). Essa é uma outra forma de mostrar a comutatividade da multiplicação.

6) X finito $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ finito

Dem:

Vamos mostrar por indução em $|X|$, tomando

$P(n)$: $|X| = n \Rightarrow \mathcal{P}(X)$ é finito

- $P(0)$: $|X| = 0 \Rightarrow X = \emptyset \therefore \mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ é finito

- $P(n) \rightarrow P(n+1)$:

Suponha $\mathcal{P}(X)$ finito $\forall X$ tal que $|X| = n$.

Fixe X tal que $|X| = n+1$. Queremos mostrar que $\mathcal{P}(X)$ é finito.

Fixe $a \in X$ qualquer (note que $X \neq \emptyset$ pois $|X| = n+1 > 0$).

Note que $X = (X \setminus \{a\}) \cup \{a\}$ e que

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X \setminus \{a\}) \cup \{A \subset X : a \in A\}$$

Mas: . $\mathcal{P}(X \setminus \{a\})$ é finito por hipótese de indução

. $|\{A \subset X : a \in A\}| = |\mathcal{P}(X \setminus \{a\})|$ e $\therefore$ é finito

(pois $f: \{A \subset X : a \in A\} \to \mathcal{P}(X \setminus \{a\})$ é bijetora)
$\quad\quad A \mapsto A \setminus \{a\}$

$\therefore \mathcal{P}(X)$ é finito, já que é união de dois conj finitos. //

Obs: Usando a ideia da demonstração, pode-se mostrar que $|X| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^n$ (Exercício Lista 5).

. Vamos terminar o texto falando algo sobre:

Conjuntos infinitos

. Lembrando; se X conjunto:

Def: X é infinito se não é finito, ou seja, $\nexists n \in \mathbb{N}$ tal que $|X| = n$.

. Definimos $|S| = n$ se S finito e observamos que $|n| = n$.
Podemos também definir, para um conjunto qualquer X:

Def: $|X| < n \iff |X| < |n|$ (análogo para $\leq$).
$|X| > n \iff |X| > |n|$ (análogo para $\geq$)

• O próximo teorema mostra que um conjunto infinito de fato tem "mais elementos" que qualquer conjunto finito.

Teorema: Se X é infinito, então $|X| > n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dem:

Note que basta mostrar que $|X| \geq n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (e.: teremos $|X| > n$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Faremos isso por indução em n, tomando

$P(n)$: "$|X| \geq n$"

• $P(0)$ é $|X| \geq 0$ o que vale.

- $P(n) \to P(n+1)$

Por hipótese $|X| \geq n$, que por definição significa dizer que $|X| \geq |n|$, ou seja, $\exists\, f: n \to X$ injetora.

Precisamos mostrar que existe $g: n+1 \to X$ injetora.

Agora como X é infinito, não pode existir uma bijeção entre n e X. ~~Logo~~ Mas f é injetora

$\therefore$ f não é sobrejetora $\Rightarrow \exists\, a \in X \setminus f[n]$.

Logo basta definir $g = f \cup \{(n,a)\}$.

Note que $g: n+1 \to X$ é injetora, como queríamos //

- Existem vários "infinitos" (ou seja tamanhos de conjuntos infinitos)

Uma primeira "divisão" é entre conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, do qual falaremos nos próximos dois textos.