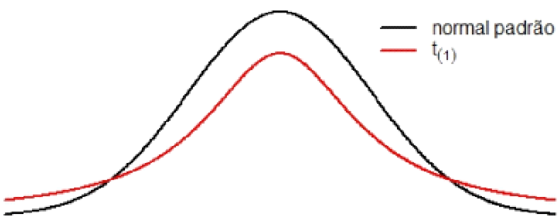
- **População normal e variância populacional desconhecida**

Nova estatística:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

Distribuição t de Student

- Simétrica em relação ao zero;
- Semelhante à distribuição normal padrão, porém com "caudas mais grossas";
- Para $n \to \infty$ $(n \geq 30)$ a distribuição t tende para a normal padrão



$$\boxed{IC(\mu)_{1-\alpha} = \left(\bar{X} - t_T\sqrt{\frac{S^2}{n}}; \bar{X} + t_T\sqrt{\frac{S^2}{n}}\right)}$$

Utilização da tabela da distribuição t de Student

Exemplos:

(a) número de graus de liberdade = 5 e $\alpha = 0,02$. t_T?

(b) número de graus de liberdade = 15 e $\alpha = 0,10$. t_T?

(c) Para n^o de graus de liberdade = 10, determinar t_T tal que $P(-t_T < T < t_T) = 0,95$

(d) Para n^o de graus de liberdade = 4, determinar t_T tal que $P(-t_T < T < t_T) = 0,80$

(e) Para n^o de graus de liberdade = 10, determinar t_T tal que $P(T > t_T) = 0,05$

(f) Para n^o de graus de liberdade = 4, determinar t_T tal que $P(T < -t_T) = 0,20$

(g) Para n^o de graus de liberdade = 24, determinar t_T tal que $P(T < -t_T) = 0,01$

(h) Para n^o de graus de liberdade = 13, determinar t_T tal que $P(T > t_T) = 0,005$

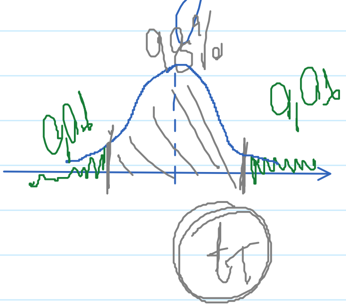
(i) Para n^o de graus de liberdade = 11, determinar t_T tal que $P(T < t_T) = 0,80$

(j) Para n^o de graus de liberdade = 12, determinar t_T tal que $P(T > -t_T) = 0,90$

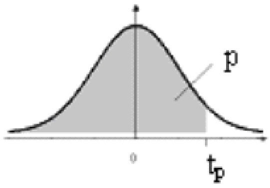
(k) Para 10 graus de liberdade, achar P(-3,169<T<3,169), P(T<3,169), P(T<-3,169)

(l) Para 5 graus de liberdade, achar P(-1,476<T<1,476), P(T<1,476), P(T<-1,476)

(a) $\nu = 5$ gl $\alpha = 0,02$ confiabilidade $1-\alpha = 0,98 \Rightarrow 98\%$



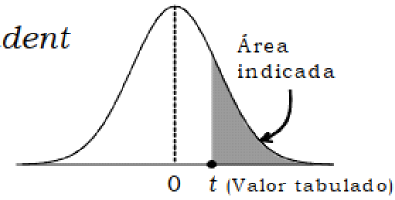
$\boxed{t_T = 3,365}$



Fornece o quantil t_p em função do n° de g.l. ν (linha) e de p = P(T≤t_p) (coluna)
T tem distribuição t de Student com ν g.l.

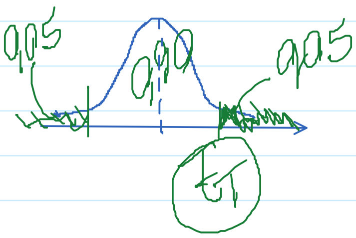
ν \ p	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032

Tabela 5 Distribuição ***t*** de *Student*



	Área na cauda superior								
gl	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
1	1,000	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,894	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959

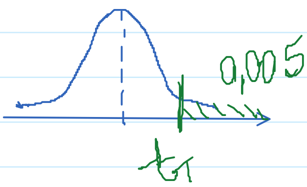
(b) número de graus de liberdade = 15 e $\alpha = 0,10$. t_T?



$t_T = 1,753$

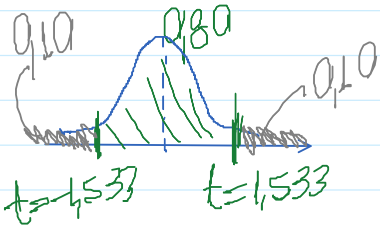
(h) Para n° de graus de liberdade = 13, determinar t_T tal que $P(T > t_T) = 0,005$

$\nu = 13$ gl



$t_T = 3,012$

(d) Para nº de graus de liberdade = 4, determinar t_T tal que $P(-t_T < T < t_T) = 0,80$



$\nu = 4gl$

$t_T = 1,533$

- **População normal e variância populacional desconhecida**

Exemplo:

Os resíduos industriais jogados nos rios, muitas vezes, absorvem o oxigênio necessário à respiração dos peixes e de outras formas de vida aquática. Uma lei estadual exige um valor médio não inferior a 5ppm de oxigênio dissolvido, cujo conteúdo seja suficiente para manter a vida aquática. Seis amostras de água retiradas de um rio revelaram os índices:

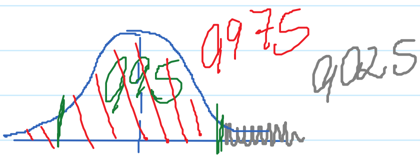
4,9	5,1	4,9	5,0	5,0	4,7

Construir o intervalo com 95% de confiança para a verdadeira média do oxigênio dissolvido, em ppm, e interpretar.

na calculadora: media SD

$\bar{x} = 4,933$

$s = 0,1366$



$t_T = 2,571$

$\nu = 5gl$

$4,933 \pm 2,571 \cdot \frac{0,1366}{\sqrt{6}}$

$$IC(\mu)_{95\%}: 4,7896 < \mu < 5,0764$$

Como a verdadeira média está entre 4,8 e 5,1 ppm e para manter a vida aquática é necessário uma oxigenação não inferior a 5ppm, pode-se dizer que o nível de oxigenação deste rio não é suficiente para a vida aquática.

- **População normal e variância populacional desconhecida**

Exemplo:

Para avaliar o peso médio ao nascer de bezerros da raça Ibagé foi examinada uma amostra de 20 partos, obtendo os dados a seguir:

24,58	26,64	28,01	23,76	26,98	23,47	26,92	27,53	26,69	23,34
24,38	28,31	26,21	29,92	28,93	26,34	28,14	28,91	25,35	28,23

Supondo que a distribuição dos dados de peso ao nascer é aproximadamente normal,

(a) Determinar estimativas por ponto para a média e para a variância dos pesos para essa amostra;

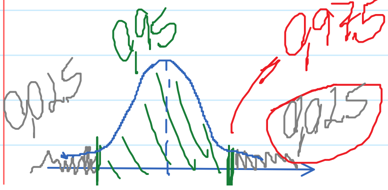
(b) Construir um intervalo de 95% de confiança para μ;

(c) Calcule o tamanho de n da amostra necessária para que se obtenha um intervalo de confiança de 95% com precisão de 2% da média.

(a) $\bar{x} = 26,632 \text{ kg}$ $\quad s = 1,9481 \text{ kg}$

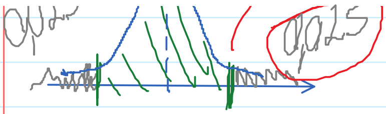
$s^2 = 3,7953 \text{ kg}^2$

(b) $95\% \Rightarrow t_T = 2,093$



$\nu = 19 \text{ gl}$

$$26,632 \pm 2,093 \cdot \frac{1,9481}{\sqrt{20}}$$



$\nu = 19$ gl $\quad 26,632 \pm 2,093 \cdot \frac{1,9481}{\sqrt{20}}$

$$\boxed{IC_{(\mu)_{95\%}}: 25,72 < \mu < 27,54}$$

(c) precisão de 2% da média: $2\% \cdot 26,632\,kg = 0,53264$

erro máx $0,53264 = 2,093 \cdot \frac{1,9481}{\sqrt{n}}$

$$n = \left(\frac{2,093 \cdot 1,9481}{0,53264}\right)^2 = 58,6 \qquad n \cong 59 \text{ bezerros}$$

- **População não normal, grandes amostras (n $>$ 30)**

Pelo Teorema Central do Limite, se n for razoavelmente grande ($n > 30$), então

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

e o intervalo de $100(1-\alpha)\%$ de confiança para a média μ da população é dada por:

$$IC(\mu)_{1-\alpha} = \left(\bar{X} - z_T\sqrt{\frac{s^2}{n}}; \bar{X} + z_T\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right)$$

Exemplo: Para se avaliar a intensidade da infestação de uma área por uma espécie de lagarta, foram observadas 32 parcelas quanto ao número de lagartas, obtendo-se uma média de 3,3 lagartas por parcela e variância 3,2 (lagartas por parcela)^2. Construir os intervalos de 95% e 99% de confiança para o número médio de lagartas na área total.

(a) Calcular o tamanho n da amostra necessária para que se obtenha um intervalo de 95% de confiança com precisão $d = 0,4$ lagartas por parcela.

(b) Calcular o tamanho n da amostra necessária para que se obtenha um intervalo de 99% de confiança com precisão $d = 0,4$ lagartas por parcela.

$n = 32$ parcelas $\quad \bar{x} = 3,3$ lagartas/parcela

→ n grande > 30 $\quad s^2 = 3,2$ (lagartas/parcela)^2

95% $\quad Z_T = 1,96 \quad 3,3 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{3,2}{32}}$

$$\boxed{IC(\mu)_{95\%}: 2,6802 < \mu < 3,9198}$$

99% $\quad Z_T = 2,58 \quad 3,3 \pm 2,58 \cdot \sqrt{\frac{3,2}{32}}$

$$\boxed{IC(\mu)_{99\%}: 2,4841 < \mu < 4,1159}$$

(a) $n = ?$ $\quad d = e_{max} = 0,4$ lagartas/parcela

95% $\quad 0,4 = 1,96 \cdot \frac{\sqrt{3,2}}{\sqrt{n}} \quad n = \left(\frac{1,96 \cdot \sqrt{3,2}}{0,4}\right)^2 = 76,83$

$Z_T = 1,96$

$Z_T = 1{,}96$

$\boxed{n \cong 77 \text{ parcelas}}$

(b) $n = ?$ $d = 0{,}4$ lagartos/parcela

99% $Z_T = 2{,}58$

$0{,}4 = 2{,}58 \cdot \frac{\sqrt{3{,}2}}{\sqrt{n}}$ $n = \left(\frac{2{,}58 \cdot \sqrt{3{,}2}}{0{,}4}\right)^2 = 133{,}13$

$\boxed{n \cong 133 \text{ parcelas}}$

Intervalo de confiança para proporção

$$IC(\pi)_{1-\alpha} = \left(\hat{\pi} - z_T\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}; \hat{\pi} + z_T\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}\right)$$

Exemplo: Coletou-se uma amostra de 35 peixes da espécie *Xenomelaniris brasiliensis*, na localidade da praia da Barra da Lagoa, Florianópolis, SC, a qual apresentou 45,7% de peixes com comprimento total acima de 50 mm. Encontre um intervalo com 95% de confiança, dentro do qual deve estar a verdadeira proporção de peixes dessa espécie com comprimento acima de 50 mm.

Qual o tamanho da amostra necessário para que tenhamos 95% de confiança de que o erro de nossa estimativa não seja superior a cinco pontos percentuais (0,05)?

$n = 35$ peixes X: Comprimento total acima de 50 mm

$\hat{\pi} = 0{,}457$

95% $Z_T = 1{,}96$ $\hat{\pi} \pm Z_T \cdot \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}$

$$0{,}457 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}457 \cdot (0{,}543)}{35}}$$

$$\boxed{IC(\pi)_{95\%}: \; 0{,}292 < \pi < 0{,}622}$$

tamanho da amostra: $e_{max} = Z_t \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}$

$$0{,}05 = 1{,}96 \frac{\sqrt{0{,}457\,(0{,}543)}}{\sqrt{n}}$$

$$n = \left(\frac{1{,}96 \cdot \sqrt{0{,}457 \cdot 0{,}543}}{0{,}05}\right)^2 \approx 381{,}32$$

$$\boxed{n \cong 382 \text{ peixes}}$$

Exemplo: Em um experimento, 320 de 400 sementes germinaram. Determine o intervalo de confiança de 99% para a verdadeira proporção de sementes que germinaram. Para realizar o teste de germinação, quantas sementes serão necessárias utilizar, se desejarmos um intervalo de confiança de 99%, com precisão de quatro pontos percentuais?

X: semente germinar

$\hat{\pi} = \frac{320}{400} = 0{,}8$ $\quad n = 400$ sementes

99% $\quad Z_t = 2{,}58$ $\quad 0{,}8 \pm 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}}$

$$\boxed{IC_{(\pi)\,99\%}: \quad 0,75 < \pi < 0,85}$$

$$0,04 = 2,58 \cdot \frac{\sqrt{0,8 \cdot 0,2}}{\sqrt{n}}$$

$$n = \left(\frac{2,58 \cdot \sqrt{0,8 \cdot 0,2}}{0,04} \right)^2 = 665,64$$

$$\boxed{n \cong 666 \text{ Sementes}}$$