Nome: **No. USP:**

Prova II (7600028)

① Considere três observadores inerciais, $\mathcal{O}$, $\widetilde{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{O}'$, caracterizados, respectivamente, por tetradas $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$, $\{\widetilde{\mathbf{e}}_\mu^a\}$ e $\{\mathbf{e'}_\mu^a\}$. De acordo com $\mathcal{O}$, $\widetilde{\mathcal{O}}$ se move com 3-velocidade $V_1\,\mathbf{e}_1^a$ e seus eixos espaciais estão alinhados. De acordo com $\widetilde{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}'$ se move com 3-velocidade $V_2\,\widetilde{\mathbf{e}}_2^a$ e seus eixos espaciais também estão alinhados.

(a) Qual a 3-velocidade de $\mathcal{O}'$, de acordo com $\mathcal{O}$? **(1,0 ponto)**

(b) Mostre que um *boost* com a velocidade calculada no item anterior relaciona a base $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$ com outra base que difere de $\{\mathbf{e'}_\mu^a\}$ por uma mera rotação espacial em torno do eixo $\mathbf{e}_3^a \equiv \mathbf{e'}_3^a$. Além disso, obtenha uma expressão que determina o ângulo dessa rotação (em termos de V_1 e V_2), deixando claro o sentido dessa rotação; **(1,0 ponto)**

(c) Considere, agora, um referencial em movimento circular uniforme (MCU) com raio R e velocidade angular Ω em relação a uma família de observadores inercial $\mathcal{O}$. Os eixos epaciais do referencial em MCU são mantidos "fixos" (o mais possível) em relação ao próprio referencial em MCU. Aplique os resultados anteriores para calcular a velocidade angular ω com que esses eixos espaciais do referencial em MCU giram em relação ao referencial da família $\mathcal{O}$. Deixe claro como os resultados dos itens anteriores são usados para isso. **(2,0 pontos)**

② Sendo $\{(ct, x, y, z)\}$ um sistema de coordenadas cartesiano inercial, considere as novas coordenadas $\{(c\tau, x, y, \zeta)\}$ definidas pelas relações

$$ct = \zeta \sinh(\kappa\tau), \quad z = \zeta \cosh(\kappa\tau),$$

onde κ é uma constante positiva.

(a) Encontre a relação entre $\{\partial_\tau^a, \partial_\zeta^a\}$ e $\{\partial_t^a, \partial_z^a\}$; **(1,0 ponto)**

(b) Calcule as componentes da métrica nas coordenadas $\{(c\tau, x, y, \zeta)\}$ a partir da expressão $g_{\mu\nu} := g_{ab}\partial_\mu^a \partial_\nu^b$; **(1,0 ponto)**

(c) Calcule as componentes da métrica nas coordenadas $\{(c\tau, x, y, \zeta)\}$ a partir da lei de transformação tensorial; **(0,5 ponto)**

(d) Calcule a 4-velocidade, a 4-aceleração e a aceleração própria da linha-de-mundo $(x, y, \zeta) = (x_0, y_0, \zeta_0) =$ constante. Deixe claro, no processo, a relação entre o tempo-próprio da linha-de-mundo e a coordenada τ. **(1,5 ponto)**

③ Numa tentativa de construir um sistema de coordenadas cartesiano acelerado o mais análogo possível ao sistema cartesiano inercial, um aluno optou por substituir a coordenada τ do sistema de coordenadas dado no exercício anterior pela coordenada $\widetilde{\tau} := (\kappa\zeta/c)\tau$. A esperança desse aluno era de que, ao utilizar apenas distâncias e tempo físicos como coordenadas, o elemento-de-linha assumiria a mesma forma que em coordenadas cartesianas inerciais, havendo, assim, uma completa simetria entre esses sistemas de coordenadas.

(a) Obtenha a matriz jacobiana de transformação de coordenadas $(c\tau, x, y, \zeta) \mapsto (c\widetilde{\tau}, x, y, \zeta)$; **(0,5 ponto)**

(b) Represente a base coordenada associada a $(c\widetilde{\tau}, x, y, \zeta)$ em termos da associada a $(c\tau, x, y, \zeta)$; **(0,5 ponto)**

(c) Calcule o elemento-de-linha nas coordenadas $(c\widetilde{\tau}, x, y, \zeta)$ e veja se o aluno conseguiu o que queria. **(1,0 ponto)**

- ***<u>Formulário</u>:***

$$
\Lambda_{\mathbf{B}}(\mathbf{V}^a) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma V_x/c & \gamma V_y/c & \gamma V_z/c \\ \gamma V_x/c & n_x^2(\gamma-1)+1 & n_x n_y(\gamma-1) & n_x n_z(\gamma-1) \\ \gamma V_y/c & n_x n_y(\gamma-1) & n_y^2(\gamma-1)+1 & n_y n_z(\gamma-1) \\ \gamma V_z/c & n_x n_z(\gamma-1) & n_y n_z(\gamma-1) & n_z^2(\gamma-1)+1 \end{pmatrix},
$$

$$
n_j := \frac{V_j}{V}, \quad V := \|\mathbf{V}^a\|, \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},
$$

$$
\mathrm{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$