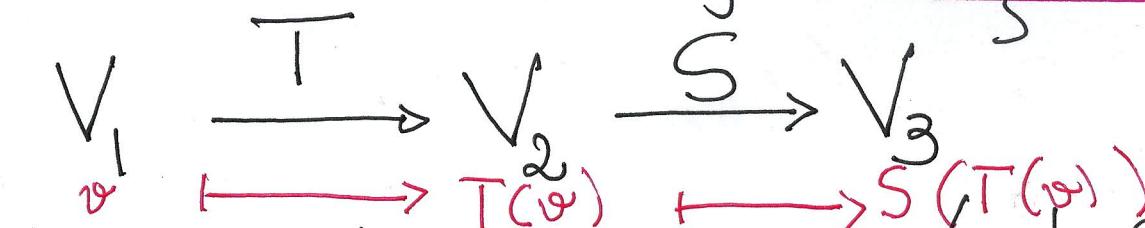


TRANSFORMAÇÕES S LINEARES

Sejam V_1, V_2 e V_3 transformações lineares
e sejam $T: V_1 \rightarrow V_2$ e $S: V_2 \rightarrow V_3$
transformações lineares. Então a
função composta $S \circ T: V_1 \rightarrow V_3$
é também uma transformação linear.



$S \circ T: V_1 \rightarrow V_3$ é definida por
 $(S \circ T)(v) \stackrel{\text{def}}{=} S(T(v))$

Mostrar que se S e T são lineares
então $S \circ T$ é linear.

Sejam $u, v \in V_1$ e $a \in \mathbb{R}$.

$$- (S \circ T)(u+v) \stackrel{\text{def}}{=} S(T(u+v))$$

$$\stackrel{T \text{ linear}}{=} S(T(u) + T(v)) = S(T(u)) + S(T(v)) \stackrel{S \text{ linear}}{=}$$

$$= (S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$$

$$- (S \circ T)(av) \stackrel{\text{def}}{=} S(T(av)) \stackrel{T \text{ linear}}{=} S(aT(v))$$

$$\stackrel{S \text{ linear}}{=} aS(T(v)) = a(S \circ T)(v).$$

Exemplo de aplicações do Teorema do Núcleo
e da Imagem:

Sejam $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

transformações lineares. Então, se

$n > m$, $S \circ T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nunca
é injetora.

Defato, como $n > m$, temos que $\text{Ker } T \neq \{0\}$,
pois $n = \underbrace{\dim \text{Ker } T}_{>0} + \underbrace{\dim \text{Im } T}_{\leq m < n} \Rightarrow \dim \text{Ker } T > 0$

Existe $v \in \text{Ker } T$, $v \neq 0$.

$$(S \circ T)(v) = S(\underbrace{T(v)}_{v \in \text{Ker } T}) = S(0) = 0.$$

Logo $\text{Ker } S \circ T \neq \{0\}$.

MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO[~] LINEAR

Seja $T: V_1 \rightarrow V_2$ uma transformação

linear, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V_1

$C = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ base de V_2

Para cada j , $1 \leq j \leq n$, determine

$T(v_j)$ e escreva como combinação

linear de C . Isto é, escreva

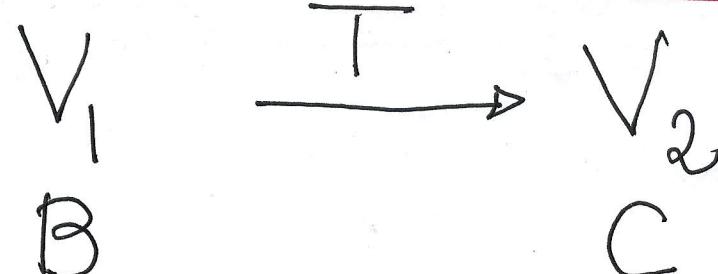
$$T(v_j) = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \dots + a_{mj}u_m.$$

A matriz $\bar{A} = (a_{ij})$ é a matriz

de T em relações bases B de

V_1 e C de V_2 .

Isto é $\boxed{\bar{A} = (a_{ij}) = [\bar{T}]_{B,C}}$



$\boxed{\bar{T}(v_j) = a_{1j} u_1 + \dots + a_{mj} u_m}$

as coordenadas de $(\bar{T}(v_j))_C$ formam
a j-ésima coluna de $[\bar{T}]_{B,C}$.

$$T = \begin{bmatrix} T(v_1) \\ a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ T(v_2) \\ a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \dots \\ T(v_n) \\ a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$$\textcircled{1} \quad T: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(p(t)) = (p(0), p(1))$$

$$B = \left\{ \underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{t}, \underset{v_2}{t^2} \right\}$$

$$C = \{e_1, e_2\} = \text{can}$$

$$T(v_1) = T(1) = (1, 1)$$

$$T(v_2) = T(t) = (0, 1)$$

$$T(v_3) = T(t^2) = (0, 1)$$

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad D : P_3(\mathbb{R}) \xrightarrow[B]{\quad} P_3(\mathbb{R}) \quad D(p(t)) = p'(t) .$$

$$B = \left\{ \frac{1}{t}, \frac{t}{t}, \frac{t^2}{t}, \frac{t^3}{t} \right\}$$

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$D(t) = 1 = 1 \cdot 1 + 0t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$D(t^2) = 2t = 0 \cdot 1 + 2t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$$

$$D(t^3) = 3t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 3t + 0 \cdot t^3$$

$$[D]_{B,B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

④ V : espaço vetorial de dimensão n

8

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

$P: V \rightarrow \mathbb{R}^n$

$P(v) = (v)_B = (a_1, \dots, a_n)$ se

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$[P]_{B, \text{can}}$

$$P(v_1) = (1, 0, \dots, 0) = e_1$$

$$P(v_2) = (0, 1, 0, \dots, 0) = e_2$$

$$P(v_n) = (0, 0, \dots, 0, 1) = e_n$$

$$[P]_{B, \text{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

$$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$$

$$v_2 = 0v_1 + 1v_2 + \dots + 0v_n$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$v_n = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 1v_n$$

Seja agora

$$Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

$$V \quad \dim V = n$$

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base de } V$$

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$Q(e_1) = v_1, Q(e_2) = v_2, \dots, Q(e_n) = v_n$$

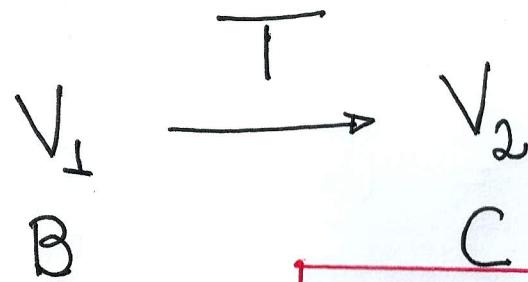
$$v_j = 0v_1 + \dots + 0v_{j-1} + 1v_j + 0v_{j+1} + \dots + 0v_n$$

Logo $[Q]_{can, B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{P} & \mathbb{R}^n \\ B & & can \end{array} \xrightarrow{Q} V \xrightarrow{P} \mathbb{R}^n$$

B V \mathbb{R}^n

Note que $Q \circ P(v) = v \quad \forall v \in V$
 $P \circ Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$



Vale que

$$[T(v)]_C = [T]_{B,C} [v]_B$$

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \quad v \in V \quad v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$C = \{u_1, \dots, u_m\} \quad T(v) = y_1 u_1 + \dots + y_m u_m$$

$$[T]_{B,C} = (a_{ij}) \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{array}$$

$$T(v) = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_m u_m$$

(1)

$$\overline{T}(v) = \overline{T}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) =$$

$$x_1 \overline{T}(v_1) + x_2 \overline{T}(v_2) + \dots + x_n \overline{T}(v_n)$$

$$= x_1 (a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots + a_{m1} u_m) +$$

$$x_2 (a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{m2} u_m) +$$

$$\dots +$$

$$x_n (a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + a_{mn} u_m)$$

$$= (\underbrace{x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n}}_{y_1}) u_1 + (\underbrace{x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n}}_{y_2}) u_2$$

$$+ \dots + (\underbrace{x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn}}_{y_m}) u_m \quad (2)$$

y_m

De (1) e (2) repare que

$$y_i = x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + \dots + x_n a_{in} \quad \forall i=1, \dots, m$$

que é o produto da i -ésima linha

da matriz $A = [T]_{B,C}$ pela matriz

coluna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Outra fórmula importante

13

$$\begin{matrix} & T \\ V_1 & \xrightarrow{\quad} V_2 & \xrightarrow{\quad S \quad} V_3 \\ B & & C & & D \end{matrix}$$

Se T transformações lineares
 V_1, V_2, V_3 espaços vetoriais

$$B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base de } V_1$$

$$C = \{u_1, \dots, u_m\} \text{ base de } V_2$$

$$D = \{w_1, \dots, w_p\} \text{ base de } V_3$$

Então

$$\left[S \circ T \right]_{B,D}^{p \times n} = \left[S \right]_{C,D}^{p \times m} \left[T \right]_{B,C}^{m \times n}$$

A demonstração é uma conta!

14

Sejam $M = (a_{ij})$, $M = [\bar{T}]_{B,C}^{m \times n}$

$N = (b_{ij})$, $N = [\bar{S}]_{C,D}^{p \times m}$

Mostrar que: Se $P = (c_{ij})$, $P = [S_0 \bar{T}]_{B,D}^{m \times p}$ então

$$P = [\bar{S}]_{C,D} [\bar{T}]_{B,C}$$

$$(S_0 \bar{T})(v_j) = S(\bar{T}(v_j))$$

$$\bar{T}(v_j) = \sum_{k=1}^m a_{kj} u_k, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$S(\bar{T}(v_j)) = S\left(\sum_{k=1}^m a_{kj} u_k\right) = \sum_{k=1}^m a_{kj} S(u_k)$$

$$\sum_{k=1}^m a_{kj} \left(\sum_{i=1}^p b_{ik} w_i \right) =$$

$$\sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj} \right) u_i$$



c_{ij}

Mas $NM = (c_{ij})$ onde cada

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p b_{ik} a_{kj}$$

Assim o resultado está provado!

$$(S_0 \Gamma)(v_j) = \sum_{i=1}^p c_{ij} w_i$$

Uma aplicação de tudo isso:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{Q} V_1 \xrightarrow{T} V_2 \xrightarrow{P} \mathbb{R}^m$$

can B C can

$$Q: \mathbb{R}^n \rightarrow V_1$$

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \quad B = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$P: V_2 \rightarrow \mathbb{R}^m \quad P(y_1 u_1 + \dots + y_m u_m) = (y_1, \dots, y_m)$$

$$\text{onde } C = \{u_1, \dots, u_m\}$$

$$\text{Então } P \circ T \circ Q = T_{\#}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\text{onde } \# = [T]_{B,C}.$$

Note que $[P \circ T \circ Q]_{\text{can, can}}$

$$= [P]_{C, \text{can}} [T_0 Q]_{\text{can, } C}$$

$$= \underbrace{[P]_{C, \text{can}}}_{\text{Im. }} [T]_{B, C} \underbrace{[Q]_{\text{can, } B}}_{\text{Im. }} \\ I_m \cdot A \cdot I_n = A$$

Assim podemos estudar apenas

$$\boxed{T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{para } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})}$$

e estamos estudando essencialmente
todas as transformações lineares
de V_1 em V_2 , com $\dim V_1 = n$ e $\dim V_2 = m$.