TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Sejam V_1, V_2 e V_3 transformações lineares e sejam $T: V_1 \longrightarrow V_2$ e $S: V_2 \longrightarrow V_3$ transformações lineares. Então a função composta $S \circ T: V_1 \longrightarrow V_3$ é também uma transformação linear.

$$
\begin{array}{ccccc}
V_1 & \xrightarrow{\quad T \quad} & V_2 & \xrightarrow{\quad S \quad} & V_3 \\
v & \longmapsto & T(v) & \longmapsto & S(T(v))
\end{array}
$$

$S \circ T: V_1 \longrightarrow V_3$ é definida por

$$(S \circ T)(v) \overset{def}{=} S(T(v))$$

Mostrar que se S e T são lineares então $S \circ T$ é linear.

Sejam $u, v \in V_1$ e $a \in \mathbb{R}$.

- $(S \circ T)(u+v) \overset{\text{def}}{=} S(T(u+v))$

$\underset{\text{T é linear}}{=} S(T(u) + T(v)) \underset{\text{S é linear}}{=} S(T(u)) + S(T(v))$

$= (S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$

- $(S \circ T)(av) \overset{\text{def}}{=} S(T(av)) \underset{\text{T linear}}{=} S(aT(v))$

$\underset{\text{S linear.}}{=} a\,S(T(v)) = a(S \circ T)(v)$.

Exemplo de aplicação do Teorema do Núcleo e da Imagem:

Sejam $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ transformações lineares. Então, se $n > m$, $S \circ T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ nunca é injetora.

De fato, como $n > m$, temos que $\operatorname{Ker} T \neq \{0\}$, pois $n = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} T}_{>0} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} T}_{\leq m < n} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T > 0$

Existe $v \in \operatorname{Ker} T$, $v \neq 0$.

$$(S \circ T)(v) \underset{v \in \operatorname{Ker} T}{=} S(\underbrace{T(v)}_{=0}) = S(0) = 0.$$

Logo $\operatorname{Ker} S \circ T \neq \{0\}$.

MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Seja $T: V_1 \longrightarrow V_2$ uma transformação linear, $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V_1
$C = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ base de V_2

Para cada j, $1 \leq j \leq n$, determine $T(v_j)$ e escreva como combinação linear de C. Isto é, escreva

$$T(v_j) = a_{1j} u_1 + a_{2j} u_2 + \cdots + a_{mj} u_m.$$

A matriz $A = (a_{ij})$ é a matriz de T em relação às bases B de V_1 e C de V_2.

Isto é $\boxed{A = (a_{ij}) = [T]_{B,C}}$.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{T} & V_2 \\ B & & C \end{array}$$

$$\boxed{T(v_j) = a_{1j} u_1 + \cdots + a_{mj} u_m}$$

as coordenadas de $(T(v_j))_C$ formam a j-ésima coluna de $[T]_{B,C}$.

$$A = \begin{array}{ccccc} T(v_1) & T(v_2) & \cdots & T(v_n) \\ \left[\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}\right. & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \left.\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}\right] \end{array}$$

Exemplos:

① $T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(p(t)) = (p(0), p(1))$

$B = \{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{t}, \underset{v_2}{t^2}\}$ $\quad C = \{e_1, e_2\} = can$

$T(v_1) = T(1) = (1, 1)$

$T(v_2) = T(t) = (0, 1)$

$T(v_3) = T(t^2) = (0, 1)$

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

② $D : \underset{B}{P_3(\mathbb{R})} \longrightarrow \underset{B}{P_3(\mathbb{R})}$ $\quad D(p(t)) = p'(t)$.

$B = \{\underbrace{1}_{v_1}, \underbrace{t}_{v_2}, \underbrace{t^2}_{v_3}, \underbrace{t^3}_{v_4}\}$

$D(1) = 0 = 0.1 + 0t + 0.t^2 + 0t^3$

$D(t) = \underline{1} = 1\,\underline{1} + 0t + 0t^2 + 0t^3$

$D(t^2) = 2t = 0.\underline{1} + 2t + 0t^2 + 0t^3$

$D(t^3) = 3t^2 = 0.\underline{1} + 0.t + 3t^2 + 0.t^3$

$$[D]_{B,B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4) V espaço vetorial de dimensão n

$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V

$$P : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$P(v) = (v)_B = (a_1, \ldots, a_n) \text{ se}$$

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

$[P]_{B, can}$

$P(v_1) = (1, 0, \ldots, 0) = e_1$

$P(v_2) = (0, 1, 0, \ldots, 0) = e_2$

$P(v_n) = (0, 0, \ldots, 0, 1) = e_n$

$v_1 = 1 v_1 + 0 v_2 + \cdots + 0 v_n$

$v_2 = 0 v_1 + 1 v_2 \cdots + 0 v_n$

$v_n = 0 v_1 + 0 v_2 + \cdots + 1 v_n$

$$[P]_{B, can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

Seja agora $\qquad V \quad \dim V = n$

$Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow V \qquad B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V

$Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$

$Q(e_1) = v_1, \quad Q(e_2) = v_2, \quad \ldots, \quad Q(e_n) = v_n$

$v_j = 0 v_1 + \cdots + 0 v_{j-1} + 1 v_j + 0 v_{j+1} + \cdots + 0 v_n$

Logo $[Q]_{can, B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} = I_n$

$$\underset{B}{V} \xrightarrow{P} \underset{can}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{Q} \underset{B}{V} \xrightarrow{P} \underset{can}{\mathbb{R}^n}$$

Note que $Q \circ P(v) = v \quad \forall v \in V$

$P \circ Q(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$V_1 \xrightarrow{T} V_2$$

$$B \qquad\qquad C$$

Vale que $\boxed{[T(v)]_C = [T]_{B,C}\,[v]_B}$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad v \in V \quad v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$C = \{u_1, \dots, u_m\}$ $\quad T(v) = y_1 u_1 + \dots + y_m u_m$

$$[T]_{B,C} = (a_{ij}) \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{array}$$

$$\boxed{T(v) = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_m u_m} \quad (1)$$

$$T(v) = T(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) =$$

$$x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) + \dots + x_n T(v_n)$$

$$= x_1 (a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots + a_{m1} u_m) +$$

$$x_2 (a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{m2} u_m) +$$

$$\text{— — — — — —} \quad +$$

$$x_n (a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + a_{mn} u_m)$$

$$= (\underbrace{x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n}}_{y_1}) u_1 + (\underbrace{x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_n a_{2n}}_{y_2}) u_2$$

$$+ \dots + (\underbrace{x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn}}_{y_m}) u_m \qquad (2)$$

De (1) e (2) repare que

$$y_i = x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + \cdots + x_n a_{in} \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

que é o produto da i-ésima linha da matriz $A = [T]_{B,C}$ pela matriz coluna $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 \cdots + a_{2n} x_n \\ \cdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Outra fórmula importante

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & \xrightarrow{\quad T \quad} & V_2 & \xrightarrow{\quad S \quad} & V_3 \\ B & & C & & D \end{array}$$

S e T transformações lineares

V_1, V_2, V_3 espaços vetoriais

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V_1

$C = \{u_1, \dots, u_m\}$ base de V_2

$D = \{w_1, \dots, w_p\}$ base de V_3

Então $$\boxed{\underbrace{[S \circ T]_{B,D}}_{p \times n} = \underbrace{[S]_{C,D}}_{p \times m} \underbrace{[T]_{B,C}}_{m \times n}}$$

A demonstração é uma conta!

Sejam $M = (a_{ij})$, $M = [T]_{B,C}$ $m \times n$

$N = (b_{ij})$, $N = [S]_{C,D}$ $p \times m$

Mostrar que: Se $P = (c_{ij})$, $P = [S \circ T]_{B,D}$ então $P = [S]_{C,D} [T]_{B,C}$.

$$(S \circ T)(v_j) = S(T(v_j))$$

$$T(v_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} u_k, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$S(T(v_j)) = S\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} u_k\right) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} S(u_k)$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kj} \left(\sum_{i=1}^{p} b_{ik} w_i \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{p} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj} \right)}_{c_{ij}} u_i$$

Mas $NM = (c_{ij})$ onde cada

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} a_{kj}$$

Assim o resultado está provado!

$$(S \circ T)(v_j) = \sum_{i=1}^{p} c_{ij} w_i$$

Uma aplicação de tudo isso:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Q} & V_1 & \xrightarrow{T} & V_2 & \xrightarrow{P} & \mathbb{R}^m \\ \text{can} & & B & & C & & \text{can} \end{array}$$

$Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_1$

$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $\quad B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$P : V_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad P(y_1 u_1 + \dots + y_m u_m) = (y_1, \dots, y_m)$

onde $C = \{u_1, \dots, u_m\}$

Então $P \circ T \circ Q = T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

onde $A = [T]_{B,C}$.

Note que $[P \circ T \circ Q]_{can, can}$

$$= [P]_{C, can} \, [T \circ Q]_{can, C}$$

$$= \underbrace{[P]_{C, can}}_{I_m} \, \underbrace{[T]_{B, C}}_{A} \, \underbrace{[Q]_{can, B}}_{I_n} = A$$

Assim podemos estudar apenas

$$\boxed{T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{para } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})}$$

e estamos estudando essencialmente todas as transformações lineares de V_1 em V_2, com $\dim V_1 = n$ e $\dim V_2 = m$.