

5. Diagonalização de Operadores

Propriedades de MS (slide 3)

i) $\det A = \det B$

Sabe-se que : $\det(AB) = \det A \det B$

Logo:

$$\begin{aligned}\det A &= \det(PBP^{-1}) = \det P \det B \det P^{-1} \\ &= \det P \det P^{-1} \det B = \det(\underbrace{PP^{-1}}_I) \det B \\ &= \det B\end{aligned}$$

ii) Quando uma matriz M é invertível? Se $\det M \neq 0$.

$$\begin{aligned}\therefore A \text{ é invertível} &\Leftrightarrow \det A \neq 0 \text{ e se } A \sim B, \\ \det A \neq 0 &\Leftrightarrow \det B \neq 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{iii) } \det(A - \lambda I) &= \det(PBP^{-1} - \lambda I) \\ &= \det(PBP^{-1} - \lambda \underbrace{PP^{-1}}_I) \\ &= \det(P(B - \lambda I)P^{-1}) \\ &= \det P \det(B - \lambda I) \det P^{-1} \\ &= \det(\underbrace{PP^{-1}}_I) \det(B - \lambda I) \\ &= \det(B - \lambda I)\end{aligned}$$

$$\therefore p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

TEOREMA: Cayley - Hamilton (Slide 7)

Exemplo: Demonstração para um EV V , $\dim(V) = 2$.

Seja $[T]_C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$, $C \dots$ base canônica de V

Polinômio Característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$p(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$

Para verificar se $p(\lambda)$ anula a matriz A , deve-se calcular $p(A)$:

$$p(A) = (aI - A)(dI - A) - bcI$$

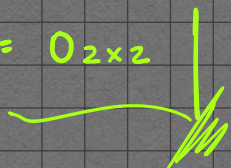
$$= \left(a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \left(d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) - bc \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & a-d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d-a & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} bc & 0 \\ -c(d-a) - c(a-d) & bc \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore p(A) = 0_{2 \times 2}$$



Esse é um caso particular da generalização para um EV de dimensão n .

TEOREMA I: Autovetores associados a autovalores distintos são LI

A demonstração será feita para o caso particular de dois autovalores distintos:

Sejam $T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$ e $T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

→ Verificando se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são LI:

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 = \vec{0} \quad (1)$$

↓ Pela Linearidade de T

$$a_1 T(\vec{v}_1) + a_2 T(\vec{v}_2) = \vec{0}$$

$$\text{mas } \begin{cases} T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1 \\ T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2 \end{cases}, \text{ então: } a_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + a_2 \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0} \quad (2)$$

$$\text{multiplicando (1) por } \lambda_1: a_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + a_2 \lambda_1 \vec{v}_2 = \vec{0} \quad (3)$$

Subtraindo (2) de (3):

$$a_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_2 \neq \vec{0} \text{ (autovetor)} \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \therefore \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \end{array} \right\} \text{ logo: } a_2 = 0$$

Substituindo a_2 em (1) e considerando $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ (autovetor):

$$a_1 = 0$$

→ $a_1 = a_2 = 0$, portanto, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \in LI$.

A demonstração para n autovalores distintos é análoga.