UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

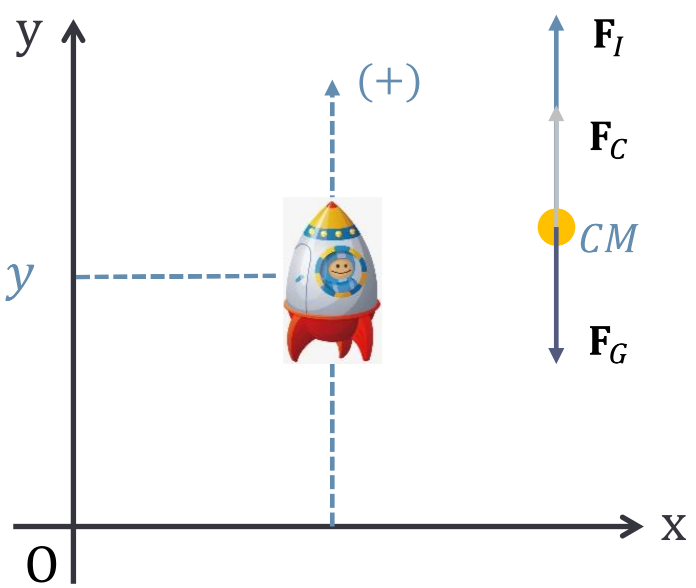
6. Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

LOB 1037 – Álgebra Linear

Profa. Paula C P M Pardal

1. Introdução

- Considere a seguinte situação: um foguete, inicialmente em repouso, subindo verticalmente a partir do solo, sujeito: à força gravitacional $\mathbf{F}_G$; a uma força constante para cima $\mathbf{F}_C$; e a um impulso $\mathbf{F}_I$, para cima, proporcional ao tempo t (contado a partir do lançamento). Qual altura atinge t segundos após o lançamento?



$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = c + bt - mg \qquad (1)$$

- Ao resolver a eq. (1), o problema está solucionado → esse exemplo ilustra a necessidade de utilizar equações envolvendo derivadas para descrever diversos fenômenos do cotidiano (Física, Química, Biologia, Economia, etc.) → tais equações são chamadas equações diferenciais (EDs).

- EDs são , portanto, eqs. que relacionam uma função e suas derivadas:

- A solução da eq. (1) é simples: integrar duas vezes e impor as condições iniciais $y(0) = 0$ e $v(0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

→ A eq. (1) e a condição inicial formam um problema de valor inicial (PVI).

- Agora, seja a equação na função $f = f(t)$ ➔ $\dot{f} - 2f = 0$.

  Qual a sua solução? $f_1(t) = e^{2t}$, mas $f_2(t) = 3e^{2t}$ também é solução.

Observação:

  Para equação do tipo $\dot{f} = af$ ➔ solução geral da forma $f(t) = ke^{at}, k = cte$.

- E para a equação $\ddot{f} - 3\dot{f} + 2f = 0$, qual seria a sua solução?

  Se $A = [T]_C$ é conhecida ➔ solução geral da forma: $F(t) = c_1F_1(t) + c_2F_2(t)$,

  $c_1, c_2 = \text{constantes}$.

➔ $F_i(t) = \overrightarrow{v_i}\, e^{\lambda_i t}$ será solução, se e somente se, $\begin{cases} \lambda_i \cdots \text{autovalor de } A \\ \overrightarrow{v_i} \cdots \text{autovetor de } A \end{cases}$, com A diagonalizável.

2. Classificação de Eqs. Diferenciais

i) *EDs Ordinárias ou Parciais*

- Classificação baseada no n. de variáveis independentes da função desconhecida:
  - 1 variável ➔ derivadas simples ➔ ED ordinária (EDO) ➔ eq. (1).
  - 2 ou mais variáveis ➔ derivadas parciais ➔ ED parcial (EDP):

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad (2)$$

ii) *Sistema de EDs*

- Classificação depende do n. de funções desconhecidas:
  - 1 função a ser determinada ➔ 1 ED.
  - 2 ou mais funções a serem determinadas ➔ sistema de EDs.

iii) *Ordem*

- A ordem de uma ED é a da derivada de maior ordem que aparecer na ED:
  - As eqs. (1) e (2) são uma EDO e uma EDP, respectivamente, de segunda ordem.
  - As eqs. das formas:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha x - \beta x y$$

➔ EDO de primeira ordem.

$$F\left(t, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (3)$$

➔ EDO de ordem n ➔ expressa a relação entre a variável independente t e os valores da função y e de suas n primeiras derivadas.

iv) *EDs Lineares e Não Lineares*

- Classificação de acordo com o tipo da função desconhecida e de suas derivadas.
- Uma EDO linear geral de ordem n é da forma:

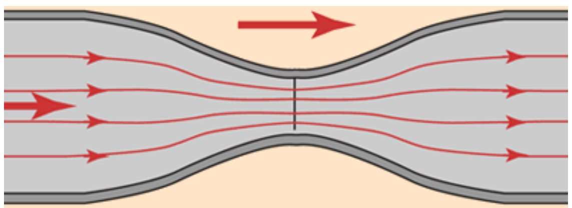
$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t) \qquad (4)$$

A eq. (1) é um exemplo de EDO linear e a eq. (2), de EDP linear.

Observação:

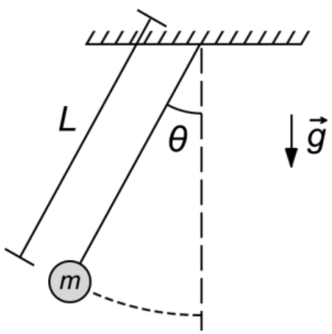
- Se $g(t) = 0$ ➔ ED é dita homogênea.
- Se $g(t) \neq 0$ ➔ ED é dita não homogênea.

- Uma eq. que não seja da forma da eq. (4) será uma ED não linear.
  - Efeito Bernoulli ➔ relaciona a diminuição na pressão de um fluido, que ocorre com o aumento de sua velocidade, através da equação:



$$p + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \rho g h = \text{constante}$$

  - Pêndulo ➔ ângulo θ que um pêndulo de comprimento L, oscilando, faz com a vertical, satisfaz a equação:



$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}(\theta) = 0 \xrightarrow[(\theta \ll 1)]{\text{Linearização}} \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

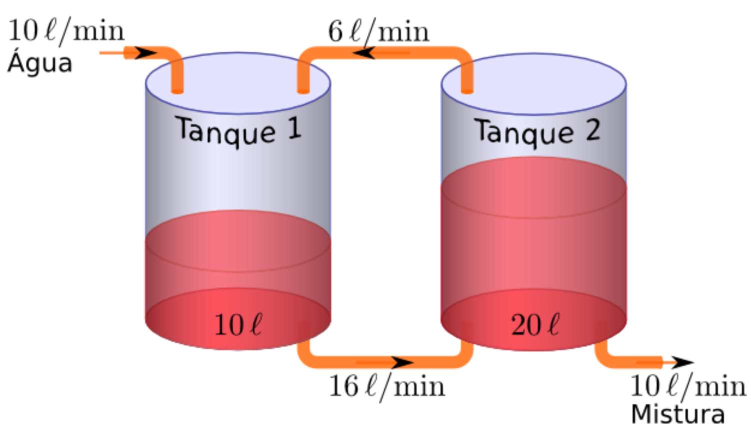
1. Encontre a solução geral do sistema de EDOs: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 - 4x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 \end{cases}$.

E quando os autovalores da matriz A não forem todos distintos?

2. Determine a solução do PVI: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4z \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + 4z \\ \dfrac{dz}{dt} = -z \end{cases}$, dadas as condições iniciais $x(0) = 0; y(0) = 1; z(0) = 2.$

3. Para a *Sequência de Fibonacci*, uma *Equação de Diferenças de 2ª Ordem*, encontre $a(t)$, a expressão para calcular o valor da sequência até a geração t (Série de Recorrência).

4. Em uma indústria, dois tanques estão conectados, conforme a figura abaixo. No instante $t = 0$, o Tanque 1 contém 10L de água pura e o Tanque 2, 20L de uma mistura de água com 12Kg de sal. Água pura está sendo constantemente bombeada para dentro do Tanque 1 a uma taxa de 10L/min; as misturas salinas são trocadas entre os tanques e a mistura escoa do Tanque 2 a uma taxa de 10L/min. Encontre a função que relaciona a quantidade de sal em cada tanque com o tempo: $x_i(t), i = 1, 2$.



EXERCÍCIOS

1. Encontre a solução geral do sistema: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x - 3y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 5x - 4y \end{cases}$.

$x(t) = c_1 e^t + 3c_2 e^{-t}; y(t) = c_1 e^t + 5c_2 e^{-t}.$

2. Encontre a solução do PVI: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -3x_1 + 4x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$, sujeito às seguintes condições iniciais: $x_1(0) = -1; x_2(0) = 2.$

$x_1(t) = 3e^t - 4e^{-2t};\ x_2(t) = 3e^t - e^{-2t}.$

3. Encontre a solução do PVI: $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -5x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -5y \end{cases}$, com $x(0) = 1; y(0) = 2.$

$x(t) = e^{-5t}; y(t) = 2e^{-5t}.$

4. Considere três tanques A, B e C, inicialmente com 100L de salmoura cada. Os líquidos bem misturados são bombeados entre os tanques, conforme a figura. Sejam $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ as quantidades de sal (kg) nos tanques A, B e C, no instante t, respectivamente. Encontre a função que relaciona a quantidade de sal em cada tanque com o tempo: $x_i(t), i = 1, 2, 3$.

$$x_1(t) = \frac{48}{100} c_1 e^{-\frac{1}{10}t} + \frac{18}{100} c_2 e^{-\frac{5}{100}t} + \frac{29}{100} c_3 e^{-\frac{2}{100}t};$$

$$x_2(t) = -\frac{11}{100} c_1 e^{-\frac{1}{10}t} - \frac{6}{100} c_2 e^{-\frac{5}{100}t} + \frac{57}{100} c_3 e^{-\frac{2}{100}t};$$

$$x_3(t) = c_1 e^{-\frac{1}{10}t} + c_2 e^{-\frac{5}{100}t} + c_3 e^{-\frac{2}{100}t}.$$