UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Escola de Engenharia de Lorena - EEL

5. Diagonalização de Operadores

LOB 1037 – Álgebra Linear

Profa. Paula C P M Pardal

1. Matrizes Semelhantes

DEFINIÇÃO:

- Sejam duas matrizes quadradas A e B. A matriz A é semelhante à matriz B ($A \sim B$) se, se somente se, existir uma matriz inversível P tal que:

$$A = PBP^{-1}$$

***Observação*:**

Se A é semelhante a B, então B é semelhante a A ($B \sim A$). Agora, multiplique a expressão anterior por P^{-1} à esquerda e por P à direita. Tem-se, portanto:

$$P^{-1}AP = P^{-1}PBP^{-1}P = B \Rightarrow B = P^{-1}AP$$

Desta forma, conclui-se que as matrizes A e B são semelhantes.

PROPRIEDADES

Sejam duas matrizes semelhantes (MS) A e B.

i. $\det(A) = \det(B)$;

ii. A é inversível $\Leftrightarrow$ B é inversível;

iii. A e B têm o mesmo polinômio característico (PC);

iv. A e B têm os mesmos autovalores, com a mesma multiplicidade (mas, em geral, não tem os mesmos autovetores);

v. A e B têm o mesmo traço.

EXEMPLOS

1. Verifique, das matrizes a seguir, quais são semelhantes:

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

2. Considere a TL definida como a projeção no plano $\alpha: x - y + z = 0$, na direção paralela a $(1,1,1)$. Para qualquer $\vec{v} \in \alpha$, verifica-se: $\begin{cases} T(\vec{v}) = \vec{v} \\ T(1,1,1) = \vec{0} \end{cases}$. A matriz de transformação A é semelhante à matriz $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Conclusões:

- Se as matrizes A e B são semelhantes e as matrizes B e C são semelhantes, então A e C também são semelhantes.

- Se as matrizes A e B são inversíveis e semelhantes, então A^{-1} e B^{-1} também são semelhantes.

- Vantagens em ser semelhante a uma matriz diagonal D (*Exemplo* 2):
  - MS têm o mesmo PC (logo, têm os mesmos autovalores);
  - MS têm o mesmo determinante;
  - Potências: $A^k = PD^kP^{-1} \Longrightarrow$ n. operações menor.

2. Polinômio Mínimo

DEFINIÇÃO (1): *Polinômio que anula uma matriz*

- Sejam $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio em x de grau $\leq n$ e A uma matriz quadrada de qualquer ordem. Então $p(A)$ é a matriz:

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

No caso em que $p(A) = 0$, diz-se que o polinômio anula a matriz A.

***Exemplo*:** Verifique se $p_1(x)$ ou $p_2(x)$ anula a matriz A. Sejam: $p_1(x) = x^2 - 9$;

$$p_2(x) = 2x + 3 \text{ e } A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

TEOREMA: *Cayley-Hamilton*

- Sejam $T: V \rightarrow V$ um OL, B uma base de V e $p(\lambda)$ o polinômio característico de T. Então:

$$p([T]_B) = 0$$

➔ Ou seja: o PC anula a matriz de transformação do OL T na base B.

***Exemplo*:** Demonstre o Teorema de Cayley-Hamilton para um EV V, tal que $\dim(V) = 2$.

DEFINIÇÃO (2): *Polinômio Mínimo ou Polinômio Minimal*

- Seja A uma matriz quadrada. O polinômio mínimo (PM) de A é um polinômio mônico ($a_k = 1$):

$$m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

que satisfaz as seguintes condições:

a) $m(A) = 0$, isto é, $m(x)$ anula a matriz A.

b) $m(x)$ é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam A.

PROPRIEDADES

i. $m(x)$ divide o PC.

$\therefore\ \exists\ q(x)$ tal que $p(\lambda_{\leftarrow x}) = q(x) * m(x)$ ➔ grau $m(x) \leq$ grau $p(\lambda_{\leftarrow x})$.

ii. $m(x)$ tem as mesmas raízes do PC.

➔ $p(\lambda_{\leftarrow x})$ é candidato a $m(x)$.

EXEMPLOS

1. Sejam $T: V \to V$ um OL e B uma base de V. Suponha que o polinômio característico de T seja $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1)^3(\lambda + 5)$. Determine os candidatos a polinômio mínimo de T.

2. Seja $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um OL dado por $T(x, y) = (4y, x)$. Determine o polinômio mínimo de T.

EXERCÍCIOS

Para os OL T a seguir, determine o polinômio mínimo:

1. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 3z)$.

$$m(x) = p(\lambda_{\leftarrow x}) = -(x-1)(x-2)(x-3)$$

2. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$.

$$m(x) = p(\lambda_{\leftarrow x}) = -x(x-3)$$

3. Base de Autovetores

TEOREMA (1):

Autovetores associados a autovalores distintos são LI.

Corolário:

Seja V um EV de dimensão n e $T: V \to V$ um OL com n autovalores distintos. Então V possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T.

***Em outras palavras*:** se for possível encontrar tantos autovalores distintos quanto for a $\dim(V)$, garante-se a existência de uma base de autovetores.

EXEMPLO

Se possível, encontre uma base B de autovetores e observe de que tipo é a matriz de transformação em relação a essa base, $[T]_B$. Considere o seguinte OL:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$$

- A matriz diagonal, $[T]_B$, do exemplo anterior, não foi obtida por acaso.
- Dado um OL $T: V \to V$, se for obtida uma base $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n}\}$, formada pelos autovetores de T, e sabendo que:

$$T(\overrightarrow{v_1}) = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + 0\overrightarrow{v_2} + \cdots + 0\overrightarrow{v_n}$$

$$T(\overrightarrow{v_2}) = 0\overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + 0\overrightarrow{v_n}$$

$$\vdots$$

$$T(\overrightarrow{v_n}) = 0\overrightarrow{v_1} + 0\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n}$$

a matriz $[T]_B$ será diagonal.

- A diagonal principal será definida pelos autovalores λ_i de T, isto é:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

  - Os autovalores λ_i não precisam ser todos distintos, ou seja, $i \leq n$. Um autovalor se repetirá na diagonal principal tantas vezes quantos forem os autovetores LI a ele associados.

DEFINIÇÃO: *Operador Diagonalizável*

Um OL $T: V \to V$ é diagonalizável se e somente se existir uma base formada por autovetores de T.

Consequência:

Se A é uma matriz quadrada e $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, T(\vec{v}) = A\vec{v}$, ou seja, A é a matriz do OL T, T será diagonalizável (ou seja, existe uma base de autovetores) se $A = PDP^{-1} \Rightarrow A \sim D, D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Definições:

a) Multiplicidade Geométrica: $\mathrm{m_g}(\lambda_i) = \dim\left(S_{\lambda_i}\right), i = 1, \cdots, k.$

b) Multiplicidade Algébrica: $\mathrm{m_a}(\lambda_i) = \alpha_i, i = 1, \cdots, k.$

- Se $p(\lambda) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x - \lambda_k)^{\alpha_k}$

c) $\mathrm{m_a}(\lambda_i) \geq \mathrm{m_g}(\lambda_i), i = 1, \cdots, k.$

TEOREMA (2):

Sejam $T: V \to V$ um OL e $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ os autovalores distintos de T. As seguintes afirmações são equivalentes:

i. T é diagonalizável;

ii. $m(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$;

iii. $\forall \lambda_i: \mathrm{m_a}(\lambda_i) = \mathrm{m_g}(\lambda_i), i = 1, \cdots, k$;

iv. $\mathrm{m_g}(\lambda_1) + \cdots + \mathrm{m_g}(\lambda_k) = \dim(V)$.

EXEMPLOS

1. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um OL dado por $T(x, y) = (4y, x)$. Determine o polinômio mínimo de T e, se possível, determine uma base de autovetores e diagonalize o operador.

2. Dada a equação na base canônica do $\mathbb{R}^2$, utilizando diagonalização de operadores, classifique a cônica que ela representa e esboce seu gráfico no plano:

$$2x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0$$

EXERCÍCIOS

1. Se possível, encontre uma base B de autovetores e observe de que tipo é a matriz de transformação em relação a essa base, $[T]_B$. Considere o OL definido por $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

   $T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$. $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (4,-5,4)\}; [T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2. Seja o OL definido por $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$. Encontre uma base do $\mathbb{R}^2$ em relação à qual T é diagonal. Escreva a matriz diagonal $[T]_B$. $B = \{(5,2), (1,-1)\}; [T]_B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

3. Para quais valores de α as matrizes abaixo são diagonalizáveis?

   a) $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ $\alpha \neq 1$

   b) $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\alpha = 0$

EXERCÍCIOS

4. Mostre que $[T]_C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável.

5. Dada a forma quadrática na base canônica do $\mathbb{R}^2$, utilize diagonalização de operadores para classificar a cônica que ela representa e esboçar seu gráfico:

   a) $x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$ — Parábola

   b) $9x^2 - 16y^2 + 18x - 64y = 55$ — Par de retas concorrentes

   c) $13x^2 + 13y^2 + 10xy - 36x - 36y - 36 = 0$ — Elipse