

2020-2, "FISMAT-AV", AULA 36

OBJETIVO: CALCULAR FUNÇÕES DE GREEN MEDIANTE TRANSFORMADAS

4.4 FUNÇÕES DE GREEN E TRANSFORMADAS

NA AULA ANTERIOR, AFIRMAMOS QUE O PVI

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) = 0, \quad x(0) = x_0$$

CORRESPONDE À EQUAÇÃO

$$U' + \alpha U = x_0 \delta$$

NO SENTIDO DE DISTRIBUIÇÕES, COM

$$U(t) \equiv H(t) x(t) \rightarrow \text{HEAVISIDE}$$

OU, EM FORMA CONVOLUTIVA,

$$(\delta' + \alpha \delta) * U = x_0 \delta.$$

ALEGAMOS QUE ~~$x(t)$~~ $G_+(t) = H(t) e^{-\alpha t}$ ERA UMA "SOLUÇÃO" PARA $t > 0$ (EM $\mathcal{D}'_+$), MAS TAMBÉM QUE $G_-(t) = -H(-t) e^{-\alpha t}$ SERIA A "SOLUÇÃO" PARA $t < 0$ (EM $\mathcal{D}'_-$).

VAMOS USAR ESSE PROBLEMA SIMPLES PARA DISCUTIR/ILUSTRAR SITUAÇÕES EM QUE AMBAS AS SOLUÇÕES "EMERGERIAM" E OUTRAS EM QUE APENAS UMA SOLUÇÃO PODERIA SER ESPERADA.

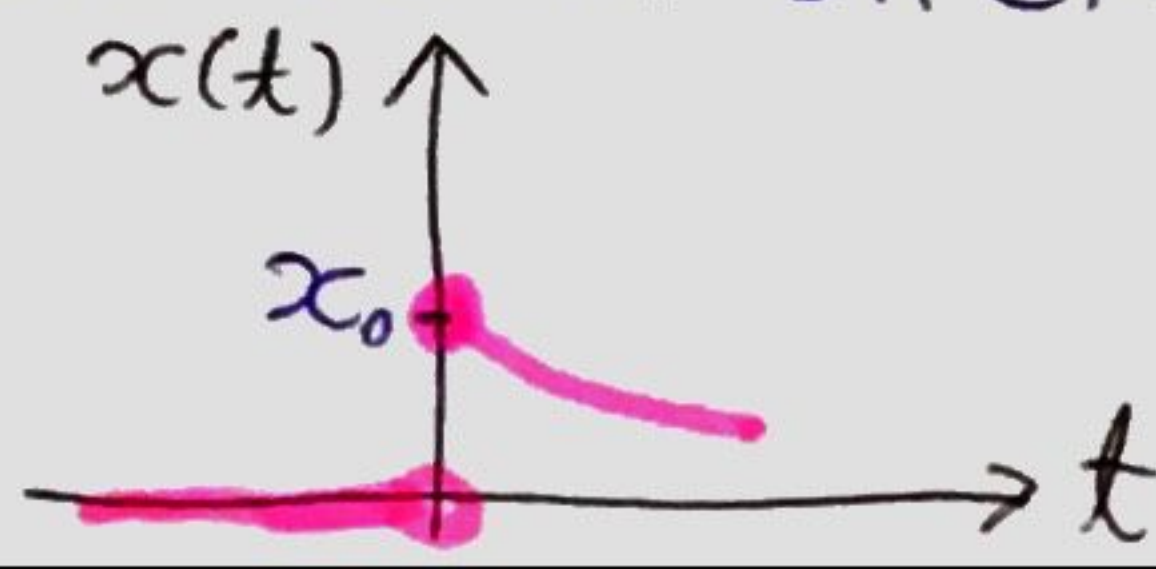
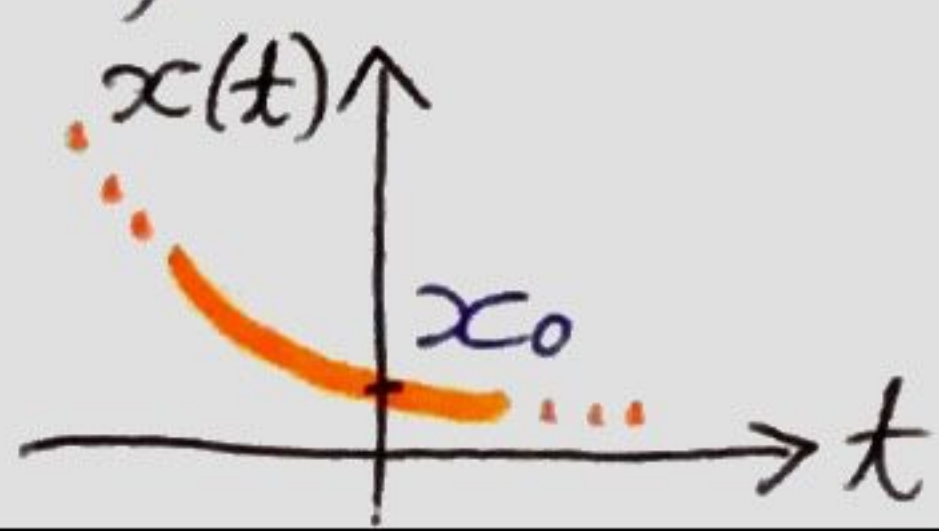
É ÓBVIO QUE A RESPOSTA DESEJADA "TEM ALGO A VER" COM $x_0 e^{-\alpha t}$. G_+ E G_- , EM DIFERENTES CONDIÇÕES, SÃO INVER-SOS DE $\delta' + \alpha \delta$ E AS DUAS RESPOSTAS IDENTIFICADAS SÃO

$$G_+ * x_0 \delta = x_0 H(t) e^{-\alpha t}, \text{ PARA } t > 0,$$

$$\text{E } G_- * x_0 \delta = -x_0 H(-t) e^{-\alpha t}, \text{ PARA } t < 0.$$

NOTE QUE ESTAS DUAS RESPOSTAS, DISTRIBUIÇÕES, SÃO DIFERENCIÁVEIS POR PADRÃO.

POR OUTRO LADO, $t \mapsto x_0 e^{-\alpha t}$ PARA $t \in \mathbb{R}$ É ILIMITADA QUANDO $t \rightarrow -\infty$. SE $t \mapsto 0$ PARA $t < 0$, A FUNÇÃO NÃO SERIA DIFERENCIÁVEL.



O QUE OBTERÍAMOS MEDIANTE UMA TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE? BEM,

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t) + \alpha x(t)] = \mathcal{L}[0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\rho \hat{x}(\rho) - x(0)] + \alpha \hat{x}(\rho) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{x}(\rho) = \frac{x_0}{\rho + \alpha}$$

ABSCISSA DE
CONVERGÊNCIA

E SABEMOS QUE $\mathcal{L}(e^{\gamma t}) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} e^{\gamma t} dt \uparrow$
 $= \frac{1}{\rho - \gamma} \quad (\rho > \gamma),$

DE MODO QUE $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x_0}{\rho + \alpha}\right) = x_0 e^{-\alpha t},$

MAS JÁ SABERÍAMOS QUE ISSO SÓ VALERIA
PARA $t > 0$, PELA DEFINIÇÃO DA TL.

VAMOS APRENDER A INVERTER UMA TL SEM USAR UMA TABELA DE RESULTADOS CONHECIDOS? VAMOS USAR A INVERSÃO DE FOURIER, POIS A TL EM SUA PLENA GENERALIDADE, É UMA EXTENSÃO DA TF,

E É UMA FUNÇÃO ANALÍTICA DO SEU
PARÂMETRO COMPLEXO $z = \gamma - i\omega$,

$$\hat{f}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt, \quad \gamma > \gamma_0,$$

$$\gamma_0 \equiv \inf \{ \gamma \in \mathbb{R} / t \mapsto |f(t)| e^{-\gamma t} \text{ É INTEGRÁVEL} \}.$$

↓
ÍNFIMO

**ABSCISSA DE
CONVERGÊNCIA**

DE FATO, SE $f(t) = 0$ QUANDO $t < 0$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\gamma - i\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-(\gamma - i\omega)t} f(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [H(t) e^{-\gamma t} f(t)] e^{i\omega t} dt \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}[H(t) e^{-\gamma t} f(t)] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(t) e^{-\gamma t} f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\gamma - i\omega)] =$$

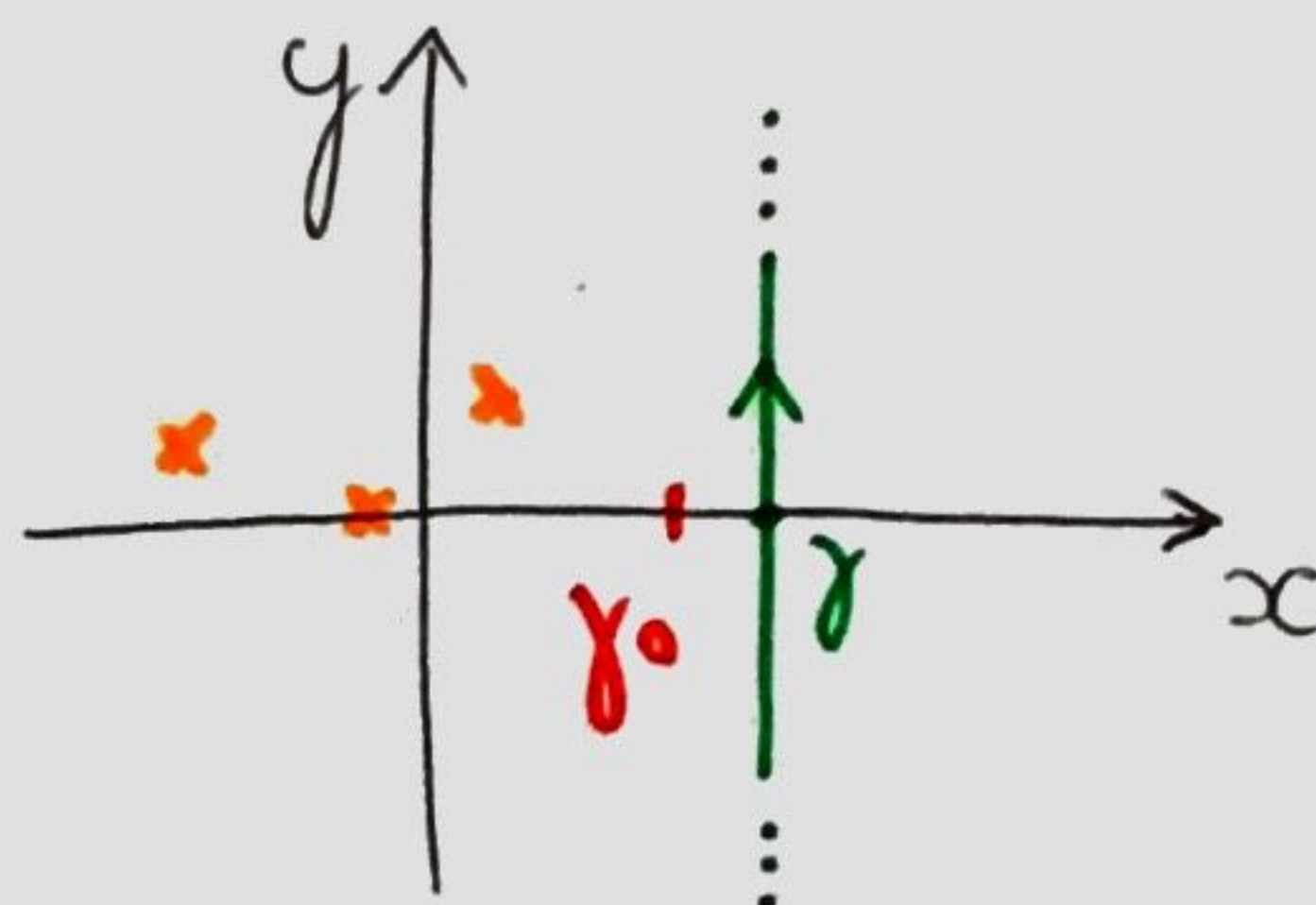
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\gamma - i\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(t) f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\gamma - i\omega) e^{(\gamma - i\omega)t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \hat{f}(\gamma - i\omega) e^{(\gamma - i\omega)t} d\omega =$$

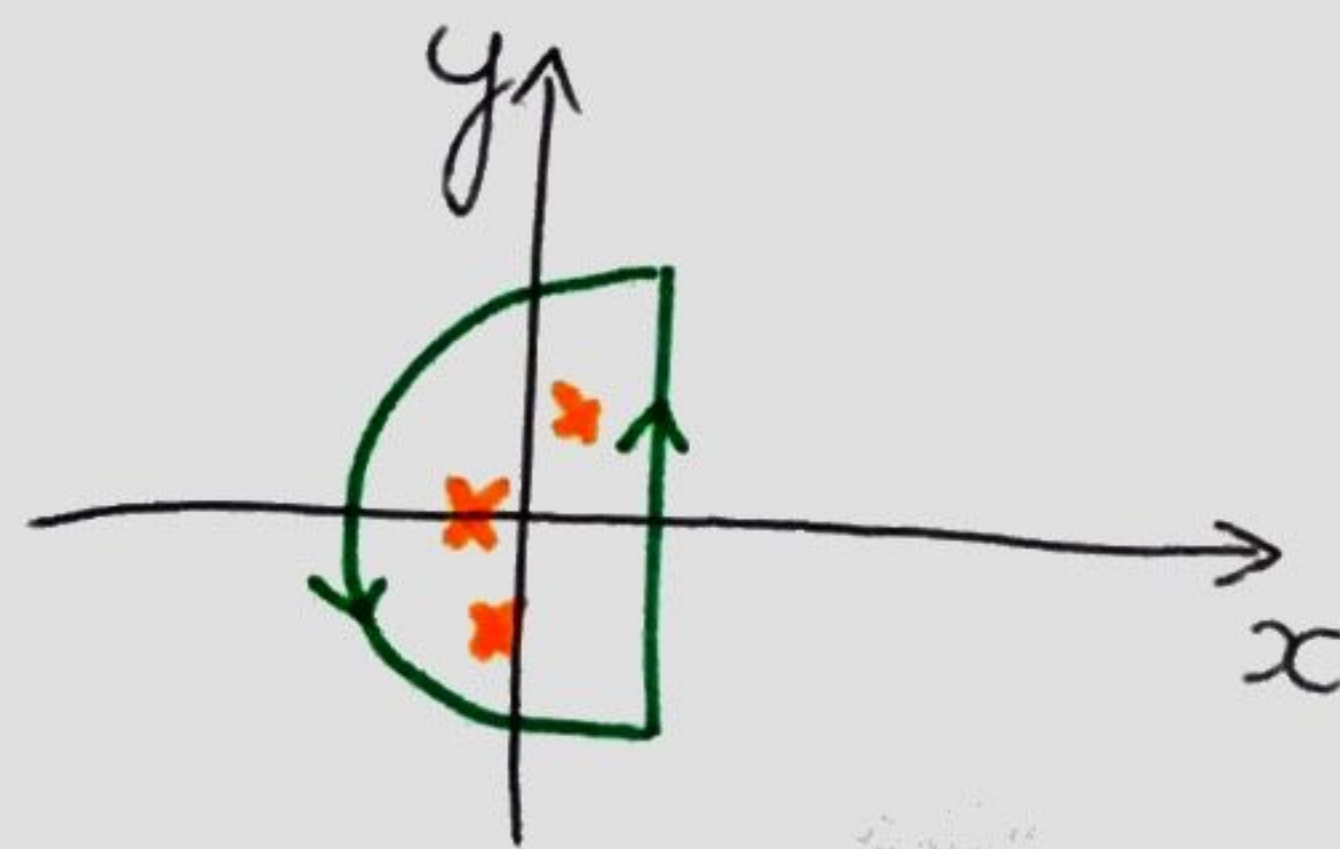
$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \hat{f}(z) e^{zt} \frac{1}{-i} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \hat{f}(z) e^{zt} dz$$



VERTICAL À
DIREITA DE
TODAS AS SIN-
GULARIDADES
E R "GRANDE O SUFICI-
ENTE" P/ ENGLOBALAS

CONTORNO
DE BROMWICH



PELO TEOREMA DOS RESÍDUOS,

$$H(t) f(t) = \sum_i \text{Res} \left(\hat{f}(z_i) e^{z_i t} \right)$$

SOMA NOS PÓLOS
~~RESÍDUOS~~

RETORNANDO AO PROBLEMA DO INÍCIO DA AULA,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{x_0}{s+\alpha}\right) \cdot H(t) = \lim_{s \rightarrow -\alpha} [s - (-\alpha)] \frac{x_0}{s+\alpha} e^{st}$$

UM PÓLO, SIMPLES $= x_0 e^{-\alpha t}$