3. Considere a seguinte versão do modelo Schumpeteriano de crescimento, em que o esforço de pesquisa afeta o tamanho das inovações, ao invés da probabilidade de ocorrência. Além disso, ao contrário do que foi feito em sala, a pesquisa é realizada pelo monopolista (incumbente).

Mais precisamente, há um bem final, produzido com trabalho e um bem intermediário, por meio da seguinte função de produção (notação idêntica à da aula):

$$\boldsymbol{Y_t = x_t^{\alpha}(A_t L)^{1-\alpha}}$$

No setor do bem final, há concorrência perfeita. A força de trabalho é constante e igual a L.

(a) Formule e resolva o problema de um produtor do bem final. Encontre a demanda pelo bem intermediário.

O problema do produtor final será maximizar:

$\pi_t^f = p_{Yt}Y_t - p_t x_t - w_t L_t$

Considerando p_{Yt} igual a 1 (numerário), e substituindo Y_t:

$\pi_t^f = x_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} - p_t x_t - w_t L_t$

Maximizando o lucro (com relação a x_t):

$\frac{\partial \pi_t^f}{\partial x_t} = \alpha x_t^{\alpha-1}(A_t L_t)^{1-\alpha} - p_t = 0$

Supondo L constante no tempo, temos a demanda pelo bem intermediário:

$p_t = \alpha x_t^{\alpha-1}(A_t L)^{1-\alpha}$

Há apenas um produtor do bem intermediário (monopolista). O custo de produção unitário nesse setor é constante e igual a 1, de modo que o lucro do monopolista é:

$$\boldsymbol{\pi_t = p_t x_t - x_t}$$

(b) Formule e resolva o problema do monopolista. Encontre preço, quantidade produzida e lucro.

O monopolista tem como restrição a curva de demanda de mercado por seu bem, derivada na parte (a):

$p_t = \alpha x_t^{\alpha-1}(A_t L)^{1-\alpha}$

Logo, o produtor escolhe p_t e x_t de modo a maximizar π_t, sujeito à curva de demanda. Substituindo essa última na equação do lucro e maximizando para x_t:

$$\pi_t = \alpha x_t^{\alpha}(A_t L)^{1-\alpha} - x_t$$

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial x_t} = \alpha[\alpha x_t^{\alpha-1}(A_t L)^{1-\alpha}] - 1 = 0$$

Sendo que a expressão entre colchetes é o próprio preço p_t. Portanto:

$$p_t = \frac{1}{\alpha}$$

A quantidade x_t e o lucro π_t são dados por:

$$p_t = \alpha x_t^{\alpha-1}(A_t L)^{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$x_t^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha^2}(A_t L)^{\alpha-1}$$

$$x_t = \alpha^{2/(1-\alpha)} A_t L$$

$$\pi_t = (p_t - 1)x_t = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\alpha^{2/(1-\alpha)} A_t L = \rho A_t L \quad ; \quad \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\alpha^{2/(1-\alpha)} = \rho$$

Para referência futura, calculamos também o produto dessa economia:

$$Y_t = x_t^{\alpha}(A_t L)^{1-\alpha} = \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)}(A_t L)^{\alpha}(A_t L)^{1-\alpha}$$

$$Y_t = \alpha^{2\alpha/(1-\alpha)} A_t L$$

Isso implica, ainda, que a taxa de crescimento do produto será igual à taxa de crescimento da tecnologia.

Em cada período *t*, o monopolista realiza pesquisa para melhorar a qualidade de seu produto (ou seja, para afetar A_t). Especificamente, A_t evolui de acordo com a seguinte regra:

$$\boldsymbol{A_t = \gamma_t A_{t-1}}$$

Sendo que γ_t é afetado pela atividade de pesquisa, isto é:

$$\boldsymbol{\gamma_t = \phi\left(\frac{R_t}{A_{t-1}}\right)}$$

Em que $\phi(0) = 1$, $\phi'(.) > 0$ e $\phi''(.) < 0$. O monopolista escolhe o esforço de pesquisa R_t de modo a maximizar seus ganhos:

$$\boldsymbol{S_t = \pi_t - R_t}$$

(c) Resolva o problema do esforço ótimo de pesquisa.

O monopolista escolherá o valor de R_t que maximiza S_t:

$$S_t = \rho A_t L - R_t = \rho L A_{t-1}\phi\left(\frac{R_t}{A_{t-1}}\right) - R_t$$

$$\frac{\partial S_t}{\partial R_t} = \rho L \phi'\left(\frac{R_t}{A_{t-1}}\right) - 1 = 0$$

$$\rho L \phi'\left(\frac{R_t}{A_{t-1}}\right) = 1$$

$$\phi'\left(\frac{R_t}{A_{t-1}}\right) = \frac{1}{\rho L}$$

(d) Analise como a taxa de crescimento do produto depende de L. Interprete.

Seja $n_t = {R_t}/{A_{t-1}}$

$$\phi'(n_t) = \frac{1}{\rho L} \quad (*) \qquad\qquad => \qquad\qquad n_t = n \ \ constante\ no\ tempo$$

Portanto n é constante no tempo e determinado implicitamente pela equação acima. Dado n é possível obter γ, que também será constante no tempo:

$$\gamma = \phi(n) \quad (**), \text{em que } n \text{ é tal que } \phi'(n) = \frac{1}{\rho L}$$

A taxa de crescimento do produto, como vimos anteriormente, é igual à taxa de crescimento da tecnologia, que é dada por:

$$g = \frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}} = \gamma - 1 = \phi(n) - 1$$

Como a taxa de crescimento g depende de L? Um aumento em L reduz o lado direito da equação (*), o que implicará uma redução também no lado esquerdo. Como $\phi'(n)$ é decrescente n (a segunda derivada da função é negativa), isso significa que n terá que aumentar.

Da equação (**), o aumento em n faz com que γ aumente (a primeira derivada da função ϕ é positiva), o que eleva também a taxa de crescimento g. Portanto, um aumento em L leva a uma elevação na taxa de crescimento do produto.

Intuitivamente, o aumento em L corresponde a uma demanda mais elevada pelo produto final, que se traduz em uma demanda também maior para o produtor intermediário, o que eleva seus lucros. A atividade de pesquisa envolve um tradeoff entre o custo de realizar a pesquisa, e a perspectiva de elevar os lucros de monopólio. Quando o lucro do monopólio aumenta (no caso, com o aumento em L), aumenta também o incentivo a fazer pesquisa, o que acaba elevando o tamanho da inovação γ e a taxa de crescimento do produto.

(e) Suponha agora que o monopolista não pode cobrar preços superiores a χ > 1 (caso contrário, potenciais produtores poderiam copiar o produto e roubar seu mercado). Como isso altera o problema? Como a taxa de crescimento e o nível do produto dependem de χ? Interprete.

Caso $\chi > p_t = 1/\alpha$, então a restrição não afeta o monopolista, e ele continuará praticando o mesmo preço identificado anteriormente, sendo mantidos os demais resultados.

No entanto, caso $\chi < p_t = 1/\alpha$, então o monopolista praticará o preço máximo que exclui seus concorrentes. Logo $p_t = \chi$. Analisamos em detalhe esse caso a seguir.

Da demanda pelo bem intermediário segue que:

$$p_t = \chi = \alpha x_t^{\alpha-1}(A_t L)^{1-\alpha}$$

$$x_t = \left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^{1/(1-\alpha)} (A_t L)$$

O lucro do monopolista será:

$$\pi_t = \chi \left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^{1/1-\alpha} (A_t L) - \left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^{1/(1-\alpha)} (A_t L) = \beta A_t L \quad ; \quad \beta = (\chi - 1)\left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

Problema do esforço ótimo de pesquisa:

$$\max_{R_t} (\chi - 1)\left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^{1/(1-\alpha)} L A_{t-1} \phi\left(\frac{R_t}{A_{t-1}}\right) - R_t$$

Condição de primeira ordem:

$$(\chi - 1)\left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} L A_{t-1} \phi'\left(\frac{R_t}{A_{t-1}}\right)\frac{1}{A_{t-1}} = 1$$

$$\phi'\left(\frac{R_t}{A_{t-1}}\right) = \frac{1}{L(\chi - 1)}\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{1/1-\alpha}$$

$$ln\phi'(n) = -lnL - \ln(\chi - 1) + \frac{1}{1-\alpha}(ln\chi - ln\alpha)$$

Diferenciando totalmente com relação a *n* e χ:

$$\frac{\phi''(n)}{\phi'(n)}dn = -\frac{1}{\chi - 1}d\chi + \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{\chi}d\chi$$

Logo:

$$\frac{\partial n}{\partial \chi} = \frac{\phi'(n)}{\phi''(n)}\left[\frac{1}{\chi(1-\alpha)} - \frac{1}{\chi - 1}\right] = \frac{\phi'(n)}{\phi''(n)}\frac{\alpha\chi - 1}{\chi(\chi-1)(1-\alpha)}$$

Como $\chi < p_t = 1/\alpha$, então $\alpha\chi - 1 < 0$. Além disso, a primeira derivada da função ϕ é positiva e a segunda derivada é negativa. Tudo isso faz com que:

$$\frac{\partial n}{\partial \chi} > 0$$

Adicionalmente, como $g = \phi(n) - 1$.

$$\frac{\partial g}{\partial \chi} = \phi'(n)\frac{\partial n}{\partial \chi} > 0$$

Assim, quando χ aumenta, temos um aumento no esforço de pesquisa e no tamanho das inovações, assim como na taxa de crescimento. Intuitivamente, um aumento nesse parâmetro eleva o custo dos rivais, o que permite que o monopolista eleve seu preço e seu lucro – equivale a uma melhora na proteção à patente do monopolista.

Com o aumento dos lucros, eleva-se o incentivo a fazer pesquisa, propiciando um aumento no esforço de pesquisa e no tamanho das inovações, assim como na taxa de crescimento do produto.

Efeito sobre o nível:

$$Y_t = x_t^{\alpha}(A_tL)^{1-\alpha} \qquad ; \qquad x_t = \left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^{1/(1-\alpha)} A_tL$$

$$Y_t = \left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} A_tL$$

Como A_t cresce à taxa g, segue que $A_t = (1 + g)^t A_0$. Logo:

$$Y_t = \left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} A_0 L (1+g)^t$$

O nível do produto é, portanto:

$$\left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} A_0 L$$

que é decrescente em χ.

Assim, o aumento em χ reduz o nível do produto (apesar do efeito positivo sobre a taxa de crescimento). Isso ocorre porque aumenta o poder de monopólio do produtor do bem final, que cobrará preços mais elevados e produzirá menos.