UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

3ª Lista de Exercícios - Projeto de Compensadores via Realimentação Dinâmica de Saída

1. Considere o ato de equilibrar uma caneta nas pontas de seus dedos. Vamos idealizar a situação, como mostrado na figura 1. A extremidade inferior da caneta se move ao longo do eixo x, com sua entrada $u(t)$ sendo a aceleração deste ponto, dada por $u(t) = \xi(t)$.

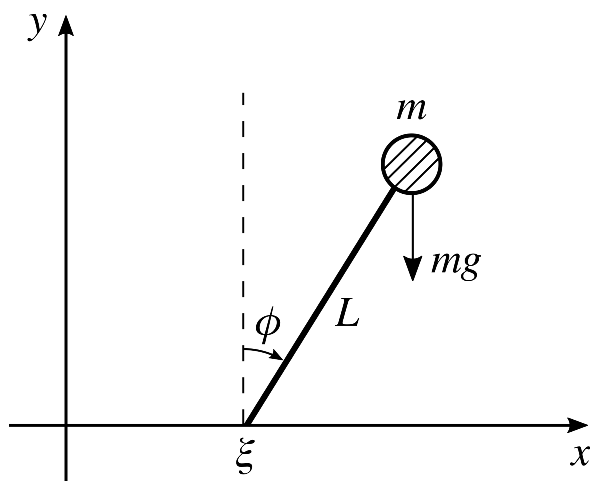

Figura 1: Equilibrando uma caneta na ponta dos dedos

De modo a modelar o problema matematicamente, algumas suposições são necessárias:

(I) a massa m está toda concentrada na extremidade superior da caneta.

(II) O ângulo ϕ é muito pequeno, de modo que $\text{sen}(\phi) = \phi$ e $\cos(\phi) = 1$.

(III) A força do seu dedo é aplicada apenas na direção de movimento da caneta.

Com isso, aplicando a 2ª Lei de Newton, temos

$$m\ddot{x} = F\text{sen}(\phi) \approx F\phi$$

onde enquanto a coordenada x do centro de gravidade é dada por

$$x(t) = \xi(t) + L\phi(t)$$

Desse modo, sabendo que a saída $y(t)$ é igual ao ângulo da caneta com a vertical ($\phi(t)$),

(a) Fazendo $z_1 = \phi$ e $z_2 = \dot{\phi}$, obtenha uma representação no espaço de estados do sistema. Em seguida, determina a função de transferência do mesmo.

(b) Determine os autovalores do sistema. O que se pode dizer sobre a estabilidade?

(c) O sistema é controlável? É observável?

(d) O sistema pode ser estabilizado através de uma lei de controle do tipo $u = -ky(t)$ (Controle Proporcional)?

(e) Determine uma lei de controle por realimentação de estados, tal que os pólos do sistema estejam em $s = -1$.

2. Na linha que conecta os centros da Terra e da Lua, existe o chamado ponto de Lagrange L_1 onde a força de atração da Terra se iguala à força de atração da Lua mais a força centrífuga. Entretanto, como veremos a seguir, trata-se de um ponto de equilíbrio instável. Com isso, devemos utilizar um controle por realimentação de estados (via motores a reação) de modo a manter um satélite em equilíbrio no ponto.

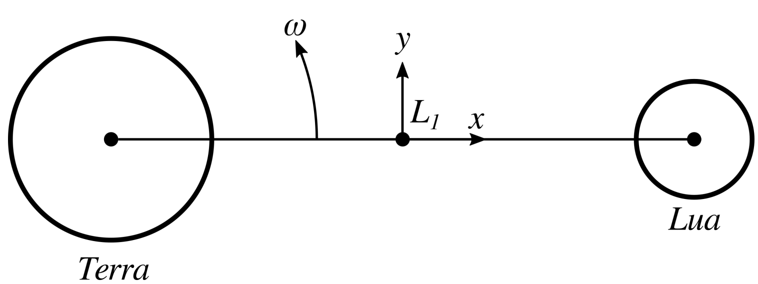

Figura 2: Sistema Terra-Lua

As equações da dinâmica para pequenas variações do ponto L_1 são dadas por

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - 9\omega^2 x = 0$$
$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} + 4\omega^2 y = u$$

onde x é a perturbação radial, y é a pertubação azimutal, $u = F/m\omega^2$, F é a força do motor na direção y, m é a massa do satélite e $\omega = 2\pi/29$ rad/dia. Desse modo,

(a) Com $u = 0$, mostre que o ponto de Lagrange $x = y = 0$ é um ponto de equilíbrio instável.

(b) Para estabilizar a posição do satélite, utilize uma lei de controle dada por

$$u = -k_1 x - k_2 \dot{x} - k_3 y - k_4 \dot{y}$$

e determine a matriz $\mathbf{K}$ de modo que os pólos do sistema estejam em $s = -3\omega$, $s = -4\omega$, $s = 3\omega \pm j3\omega$.

3. A dinâmica de uma barra quase vertical, com um pêndulo amarrado à mesma é dada por

$$\ddot{\psi}(t) - \sigma^2\psi(t) - \omega^2[\psi(t) + \theta(t)] = u(t)$$
$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2\theta(t) + \epsilon\ddot{\psi}(t) = 0$$

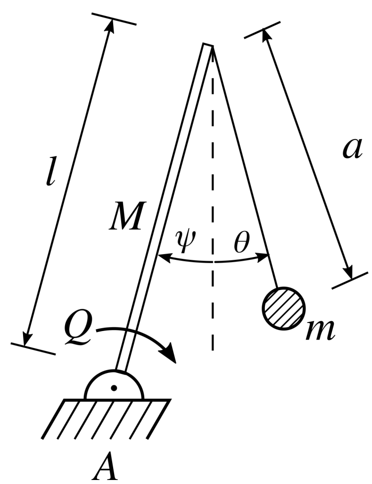

Figura 3: Barra com pêndulo amarrado

onde

$$\sigma^2 = \frac{3g}{2l}, \quad \omega^2 = \frac{3mg}{Ml}, \quad \epsilon = \frac{l}{a}$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{a}, \quad u = \frac{Q}{Ml}$$

$Q =$ torque aplicado ao ponto A

$g =$ força gravitacional por unidade de massa

Assumindo que $a = l$ e $M = m/3$ e dividindo as equações por ω_0^2, devemos ter

$$\frac{\sigma^2}{\omega_0^2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1$$

Além disso, se medirmos o tempo em unidades de $1/\omega_0^2$ e u em unidades de ω_0^2, podemos reescrever as equações como

$$\ddot{\psi}(t) + \frac{3}{2}\psi(t) - [\psi(t) + \theta(t)] = u(t)$$
$$\ddot{\theta}(t) + \theta(t) + \psi(t) = 0$$

(a) Assumindo

$$x_1 = \psi, \quad x_2 = \dot{\psi}, \quad x_3 = \theta, \quad \text{e} \quad x_4 = \dot{\theta}$$

determine a representação no espaço de estados do sistema.

(b) Em seguida, projete um controlador por realimentação de estados de modo que a dinâmica da massa m tenha uma constante de tempo $T/2$, onde o período de oscilação $T = 2\pi\sqrt{a/g}$.

4. Um helicóptero próximo de pairar pode ser descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4 & 0 & -0,01 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1,4 & 9,8 & -0,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \theta \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,3 \\ 0 \\ 9,8 \end{bmatrix} \delta$$

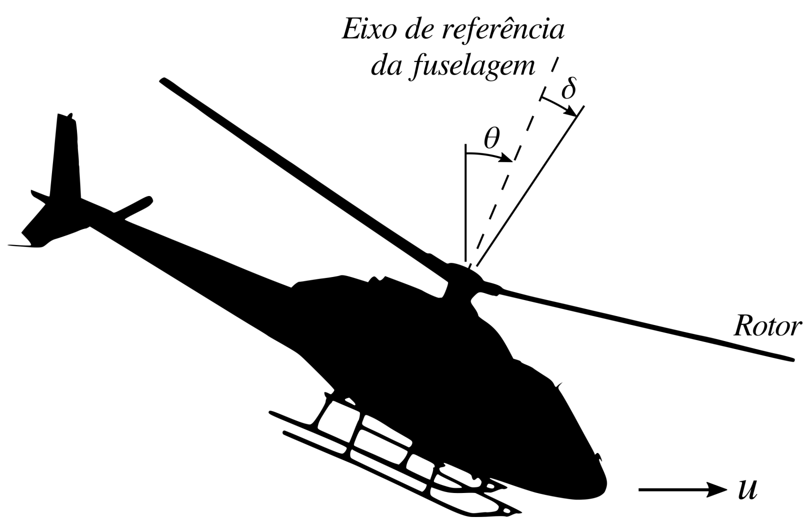

Figura 4: Helicoptero próximo de pairar

onde

$$q = \text{taxa de arfagem}$$
$$\theta = \text{ângulo de arfagem da fuselagem}$$
$$u = \text{velocidade horizontal}$$
$$\delta = \text{ângulo de inclinação do rotor}$$

Suponha que nossos sensores estejam medindo a velocidade horizontal u como a saída, isto é, $y = u$.

(a) Obtenha os polos de malha aberta.

(b) O sistema é controlável?

(c) Projete um controlador por realimentação de estados que coloque os polos do sistema em $s = -1 \pm j$, e $s = -2$.

(d) Projete um observador[1] de ordem completa para o sistema que aloque os polos do observador em $s = -8$ e $s = -4 \pm j4\sqrt{3}$.

5. Um motor CC de imã permanente (PMDC[2]) com indutância de armadura desprezível possui a seguinte função de transferência

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{-50}{s(s+5)}$$

onde $V(s)$ é a tensão aplicada nos terminais do motor e θ é o ângulo do eixo do motor.

(a) Determine uma representação no espaço de estados, onde $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$.

(b) Projete um controlador por realimentação de estados de modo que a função de transferência de malha fechada possua um amortecimento $\zeta = 0,7$ e uma frequência natural $\omega_n = 10$ rad/s.
Dica: O polinômio característico possui a forma $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$.

(c) Projete um observador de estado de modo que o mesmo possua $\zeta_o = 0,5$ e $\omega_{no} = 20$ rad/s.

(d) Obtenha a função de transferência do sistema completo.

(e) Desenhe a o diagrama de blocos do sistema identificando todos os blocos.

[1] Em algumas literaturas você vai encontrar o nome estimador como sinônimo.
[2] do inglês, *Permanent Magnet DC*

6. O motor CC da figura 5 pode ser descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/J & K/J \\ 0 & -K/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} V$$

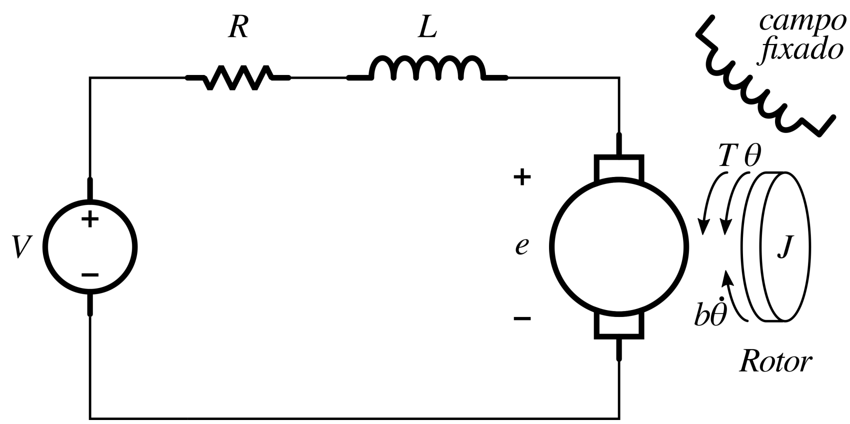

Figura 5: Motor CC

onde

J = Momento de inércia do rotor

b = Constante de atrito viscoso do motor

K_b = Constante de Força do motor

R = Resistência Elétrica do motor

L = Indutância do motor

J (kgm^2)	b (Nms)	K_b (Nm/A)	R (Ω)	L (H)
$3,228 \times 10^{-6}$	$3,5077 \times 10^{-6}$	$0,0274$	4	$2,75 \times 10^{-6}$

Utilizando o MATLAB,

(a) Obtenha um modelo no espaço de estados do sistema, utilizando o comando `ss(A,B,C,D)`.

(b) Determine se o sistema é controlável, utilizando o comando `rank(ctrb(A,B))`.

(c) Projete um controlador por realimentação de estados utilizando o comando `place` ou `acker`, de modo que os pólos do sistema em malha fechada sejam $s = -200$ e $s = -100 \pm j100$.

(d) Plote a resposta do sistema à uma entrada do tipo degrau unitário.

7. Suponha que as equações linearizadas e normalizadas do sistema formado por um pêndulo invertido em cima de um carrinho, tracionado por um motor CC sejam dadas por

$$\ddot{\theta} = \theta + v + u$$
$$\dot{v} = \theta - v - u$$

onde

$$\theta = \text{ângulo do pêndulo}$$
$$v = \text{velocidade do carrinho}$$

(a) Projete um controlador por realimentação de estados, de modo que polos de malha fechada resultantes sejam dados por $s = -1$ e $s = -1 \pm j\sqrt{3}$.

(b) Assuma que θ e v sejam medidos e construa um estimador para θ e $\dot{\theta}$ da forma

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

onde $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}$ e $y = \theta$. Obtenha $\mathbf{L}$ de modo que o observador tenha polos em $s = -2$.

8. Um modelo simplificado de controle de braço robótico e descrito na figura 6

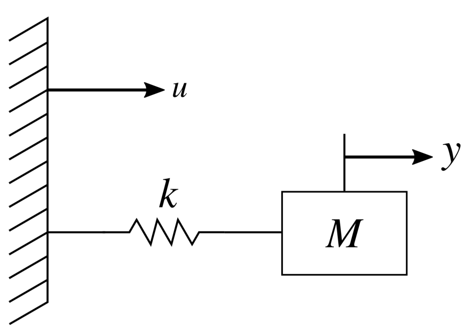

Figura 6: Braço robótico simples

onde

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{M} &= 900 \text{ rad/s}, \\
y &= \text{posição da massa}, \\
u &= \text{posição do fim da mola}
\end{aligned}
$$

(a) Escreva as equações de movimento na forma de espaço de estados.

(b) Projete um observador com raízes em $s = -100 \pm j100$.

(c) Projete um controlador por realimentação de estados com raízes $s = -20 \pm j20$

Referências

[1] Kuo, B. C., “Sistemas de Controle Automático”, 4ª ed., Prentice-Hall, 1985.

[2] Chen, C. T., “Linear Systems Theory and Design”, 3rd ed., Oxford University Press, 1999.

[3] Khalil,H. K.,"Nonlinear Systems", 3rd ed., Prentice Hall, 2002.

[4] Brunton, S., "Data-Driven Science and Engineering", Cambridge University Press, 2019.

[5] Friedland, B., "Control System Design: An Introduction to State-Space Methods", 1ª Ed., Dover Publications, 1986.

[6] Brogam,L. W.,"Modern Control Theory,3ª Ed.,Prentice Hall, 1991.

[7] Kailath,T.,"Linear Systems",1ª Ed.,Pretince Hall, 1979.