

PQI-5776 Fenômenos de Transporte I

AULA 8 - [parte 1 de 4] Turbulência: Modelos Físicos - Estrutura

Tudo o que se sabe sobre a turbulência é que ela é **sempre**:

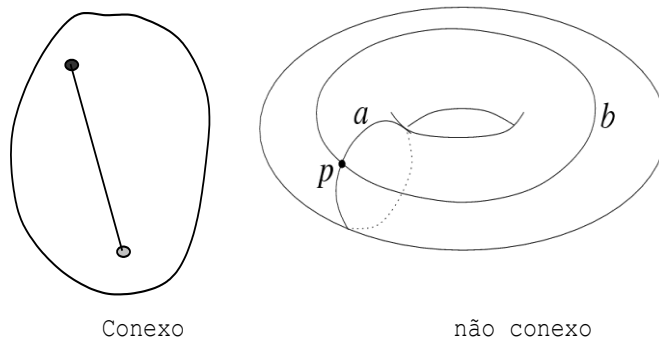
Tridimensional      rotacional      irreversível  
**3D** ;       $\text{rot } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  ;       $\dot{\sigma}_{VS} > 0$ .

Vamos então ao que não se sabe.

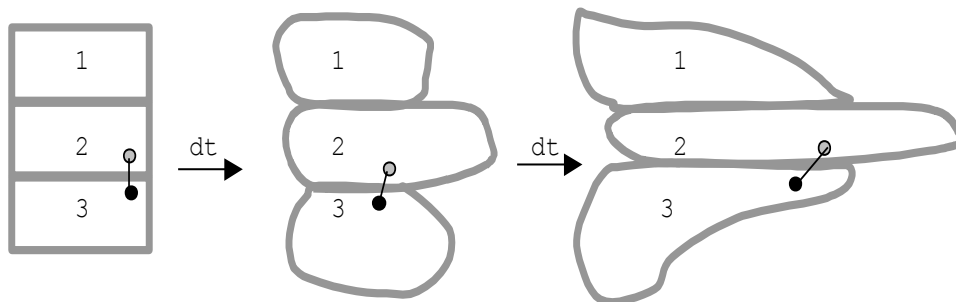
Será: um **continuum** ?    **Caótico**?    **Estatístico**?    **Instável**?

1) Continuidade exige (Aris R., Vectors, Tensors and the Basis of Fluid Mechanics, Prentice Hall, 1962):

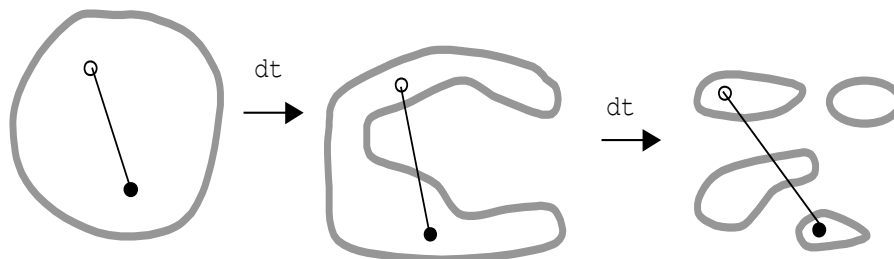
(a)- elementos de volumes simplesmente conexos



(b)- elementos de volumes vizinhos permanecem vizinhos



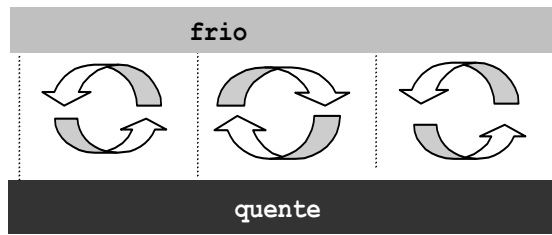
(a) e (b) valem -> contínuo (laminar)



nem (a) nem (b) valem -> descontínuo (turbulento)

O escoamento turbulento **não** é totalmente contínuo!  
 As equações de continuidade ainda valem?

Exemplo 1: Células de **Benard** (frigideira) um fluido entre duas placas, uma quente e outra fria desenvolve uma colmeia de vórtices tridimensionais com padrão espetacularmente organizado:



vue du dessus

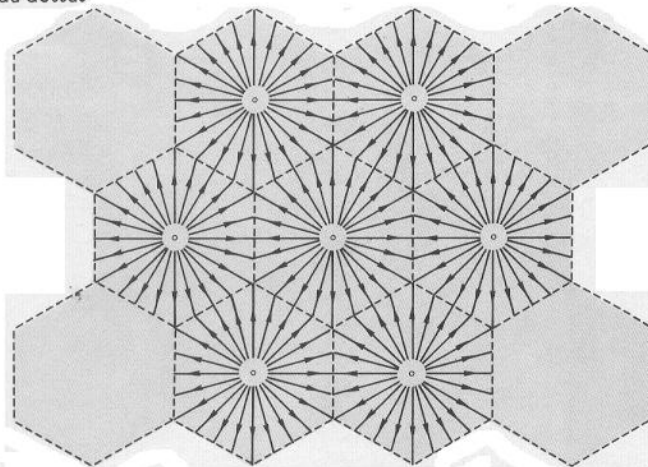
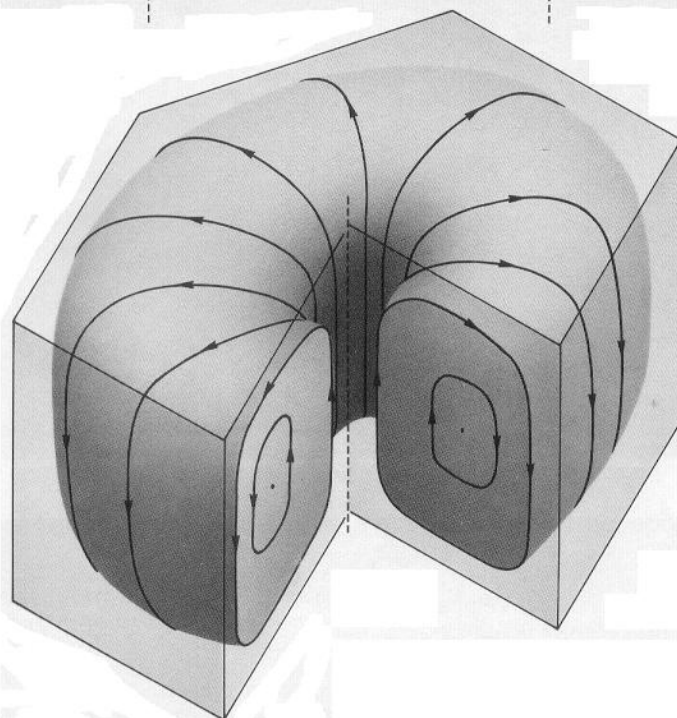
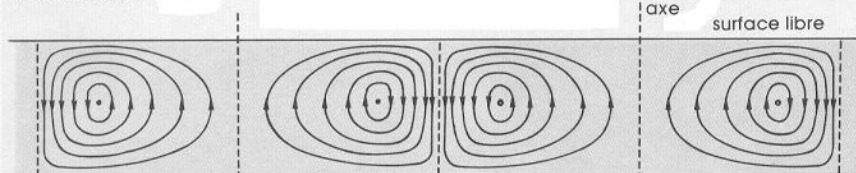
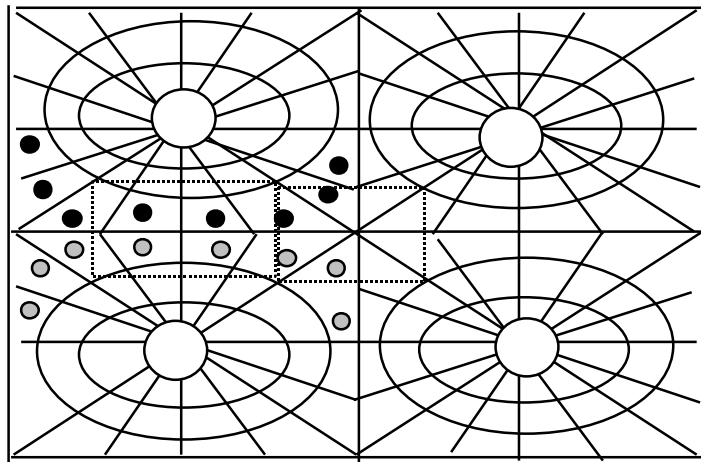


Figure 2. Ces dessins représentent l'expérience historique que réalisa Bénard en 1900. Il découvrit qu'une couche fluide, chauffée par le bas, s'organise spontanément en cellules, hexagonales ici. Dans chacune de ces cellules, environ deux fois plus larges que hautes, du fluide chaud monte au centre et redescend froid sur les bords. Dans le cas particulier étudié par Bénard, la surface supérieure du liquide était en contact libre avec l'air, ce qui faisait jouer à la capillarité un rôle important. Dans les expériences que décrit l'article, le fluide est enfermé entre deux plaques rigides, ce qui simplifie les phénomènes observés, mais le chauffage est suffisamment intense pour que l'écoulement semble totalement désordonné.

vue en coupe



As células de Benard apresentam focos de descontinuidade:



A velocidade média de um sistema de partículas (no caso a velocidade macroscópica de um elemento de volume) e a sua variância específica podem ser definidas respectivamente como:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\sum_k m_k \vec{v}_k}{\sum_k m_k} \quad ; \quad \langle v^2 \rangle = \frac{\sum_k m_k (\vec{v}_k \cdot \vec{v}_k)}{\sum_k m_k}$$

a velocidade de cada partícula relativa ao centro de massa do elemento é:

$$\vec{v}_k = \langle \vec{v} \rangle + \vec{v}'_k$$

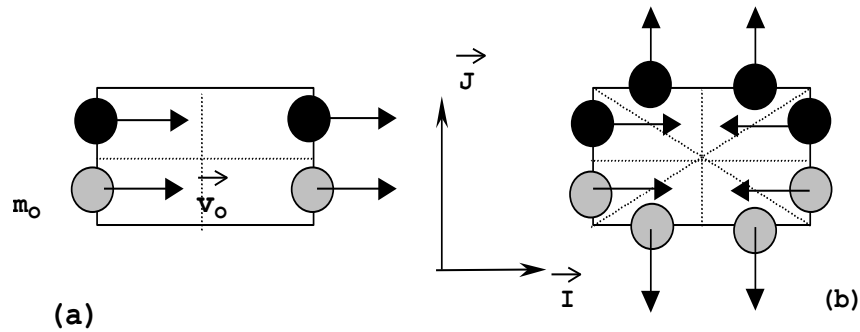
é trivial verificar que:

$$\langle \vec{v}'_k \rangle = 0 \quad e \quad \langle v^2 \rangle = \langle \vec{v} \rangle^2 + \langle v'^2 \rangle$$

isto é a energia cinética específica total pode ser compreendida como a soma da energia cinética em uma escala macroscópica e a numa escala microscópica (interna ~ Temperatura). O mesmo procedimento pode ser repetido numa escala intermediária onde as flutuações de velocidade ocorrem devido à turbulência. A medida da intensidade da turbulência é dada por:

$$I = \frac{\sqrt{\langle v'^2 \rangle}}{\sqrt{\langle v^2 \rangle}} \quad 0 \leq I \leq 1$$

considerando, a título ilustrativo, para as duas células assinaladas na figura acima, um modelo muito simplificado no qual apenas uma "molécula" (sempre de massa  $m_0$  e velocidade  $v_0$ ) atravessa cada fronteira de cada sub-célula. A célula (a) obedece a continuidade e é nitidamente laminar mas a (b) não.



Examinando a intensidade de turbulência calculando para cada caso:

$$\langle \vec{v} \rangle_a = \frac{1 + 1 + 1 + 1}{4 m_o} m_o v_o \vec{I} = v_o \vec{I}$$

$$\langle \vec{v} \rangle_b = \frac{(2 - 2)\vec{I} + (2 - 2)\vec{J}}{8 m_o} m_o v_o = 0$$

$$\langle \vec{v}' \rangle_a = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\langle \vec{v}' \rangle_b = (2 - 2) + (2 - 2) = 0$$

$$\langle v^2 \rangle_a = \frac{1 + 1 + 1 + 1}{4 m_o} m_o v_o^2 = v_o^2$$

$$\langle v^2 \rangle_b = \frac{8(1)}{8 m_o} m_o v_o^2 = v_o^2$$

$$\langle \vec{v}'^2 \rangle_a = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\langle \vec{v}'^2 \rangle_b = 8 v_o^2 / 8 = v_o^2$$

$$I_a = \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{v_o^2}} = 0$$

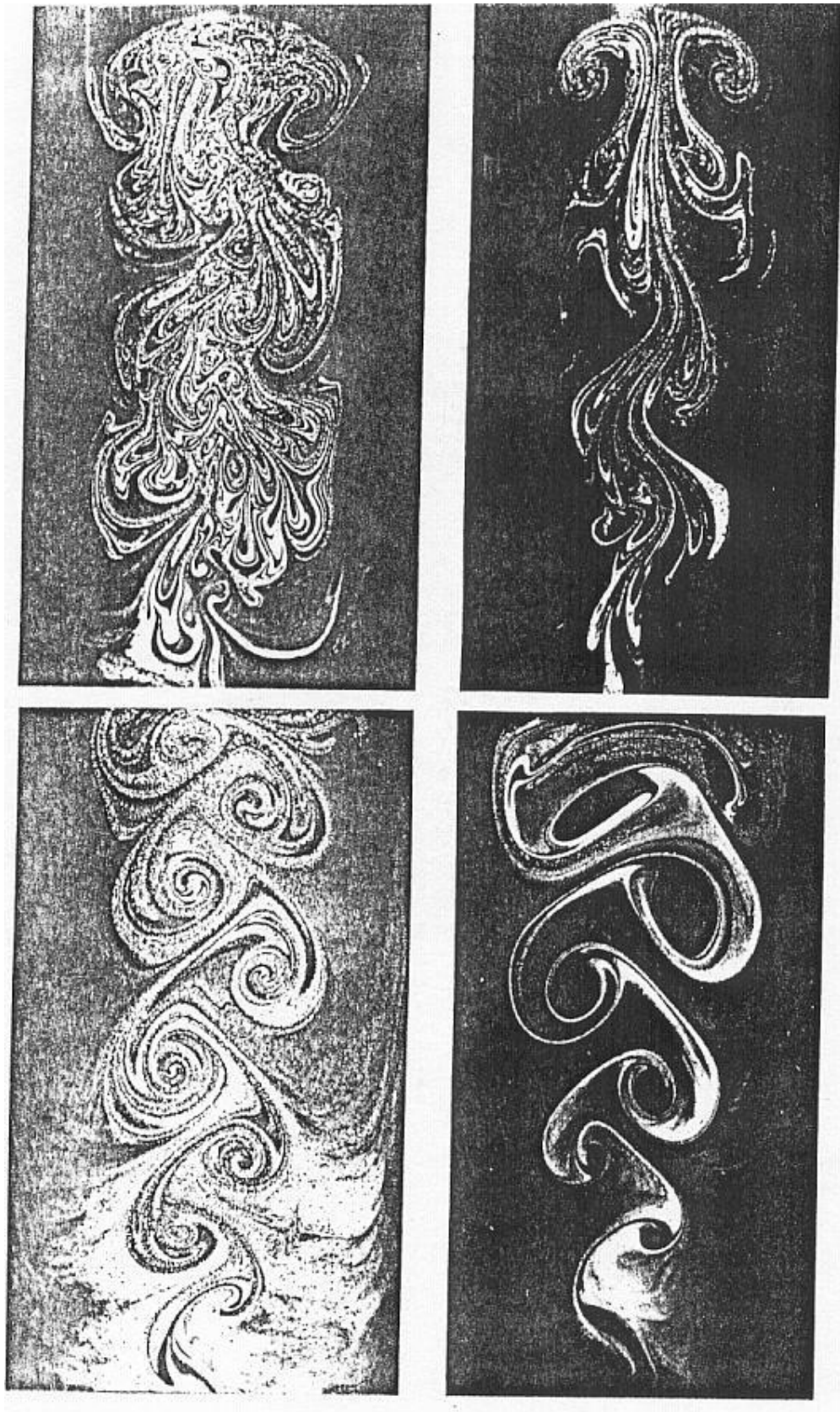
$$I_b = \frac{\sqrt{v_o^2}}{\sqrt{v_o^2}} = 1$$

portanto a célula (a) que tem um comportamento singular não apresenta intensidade de turbulência enquanto que a (b) que tem um foco de descontinuidade apresenta intensidade de turbulência máxima. Este exemplo aparentemente paradoxal ilustra o tratamento matemático da turbulência.

Exemplo (2): Vórtices de Von Karman

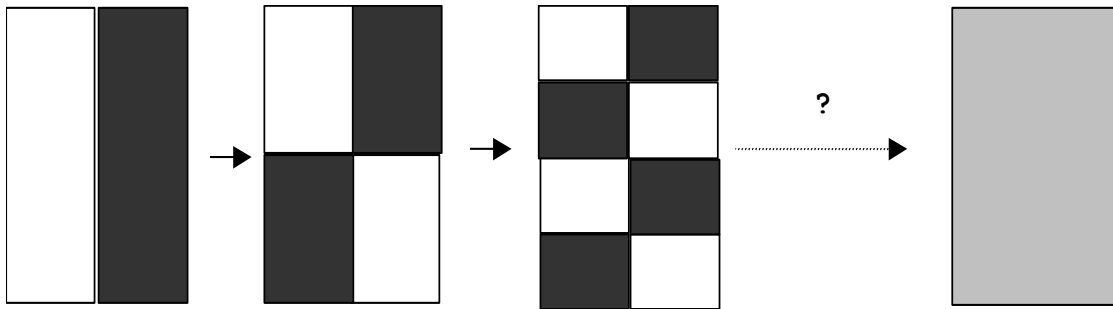


Observa-se que o escoamento **não** é totalmente caótico. Existe ordem em seu caos. (Ou será que o caos gera a sua própria ordem?)

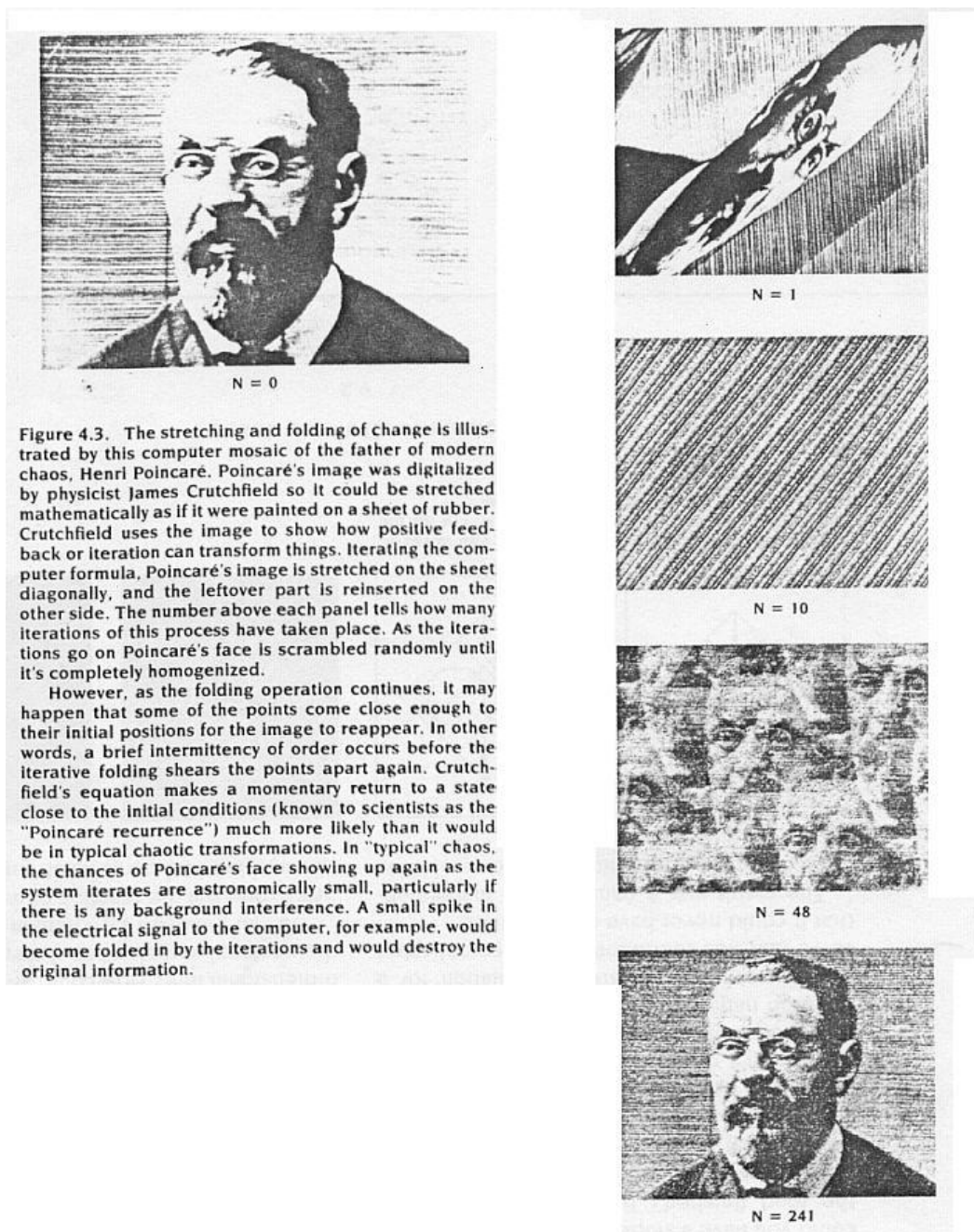


Existem então modelos físicos que visam contemplar as lindas formas dessas estruturas coerentes?

Sim veja o do padeiro:



Mas CUIDADO! estes modelos físicos propõem padrões de mistura mas não de irreversibilidade (não destroem a informação original).



O sofisticado modelo "stretching & folding" de Smale revela-se reversível após algumas iterações assim não teria sucesso no equacionamento da turbulência. Não que não sejam aplicáveis a fenômenos físicos, mas não à turbulentos:

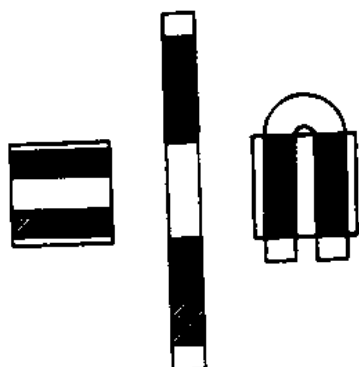


Fig. 36. Representation of the Smale horseshoe map.

$Re \downarrow$

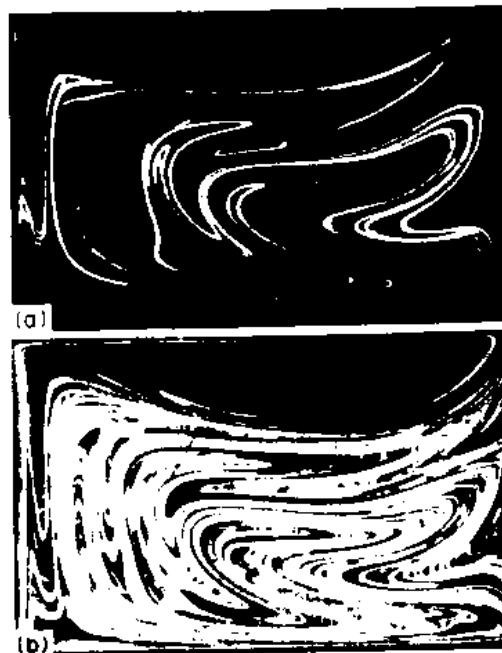
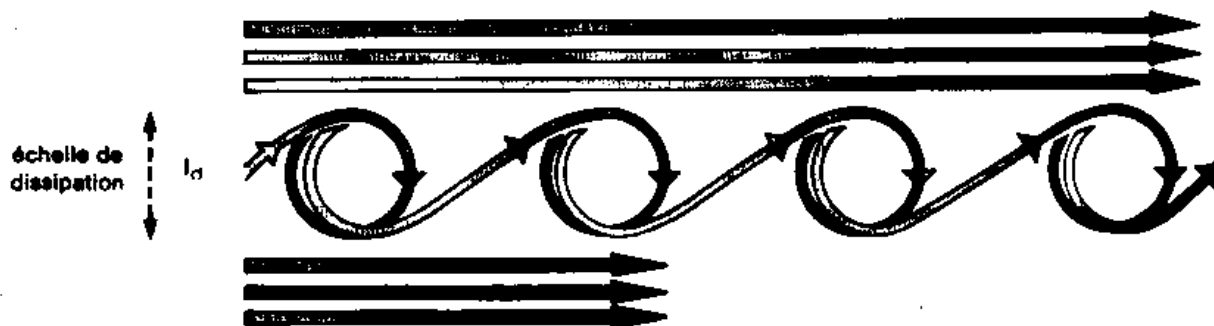


Fig. 37. Mixing of a blob of a tracer in low Reynolds number cavity flow (an improved version of the apparatus described in Chien *et al.* (1986). The fluid is glycerine and the tracer is a fluorescent dye; illumination is provided by ultraviolet light. The system mixes by periodic operation of the upper and lower boundaries moving in sinusoidal fashion (corotating) with a period of 30 s. (a) represents the system after nine cycles whereas (b) represents the system after 14 cycles. Note the almost exponential mixing growth and the "holes" of unmixed material (regular region). Even though "holes" deform by repeated application of the cycles they do not disappear even for long times. From Leong (1987).

Fig 36 chemengscin 43 pag 177 Smale

Exemplo (3): A formação e vida do vórtice



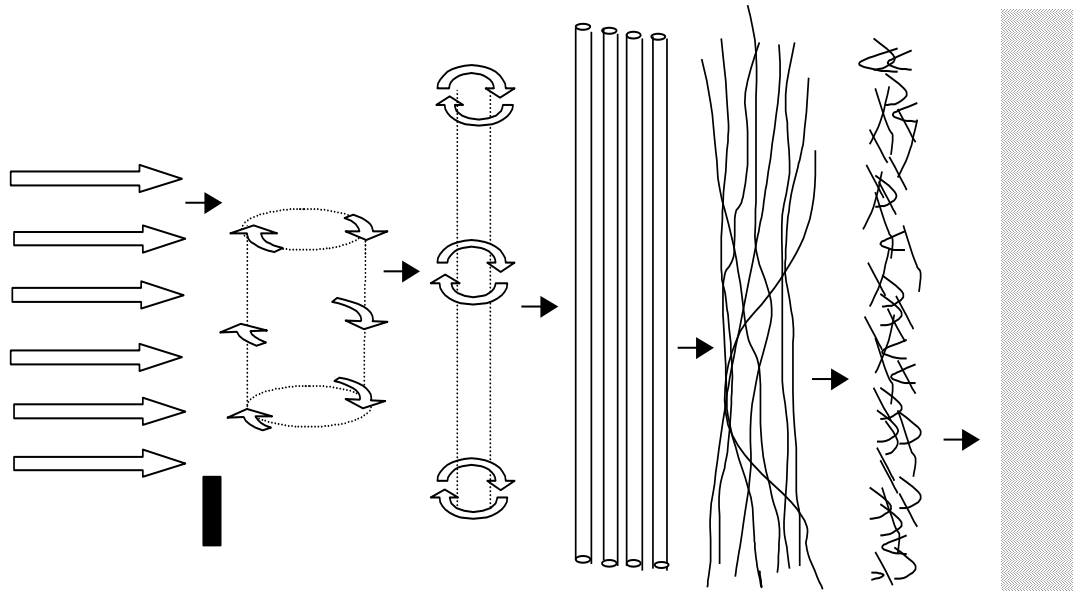
O estudo dos vórtices é feito pelo balanço de  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{rot } \vec{\omega} \times \vec{v} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \frac{1}{\rho^2} \text{grad } p \times \text{grad } p$$

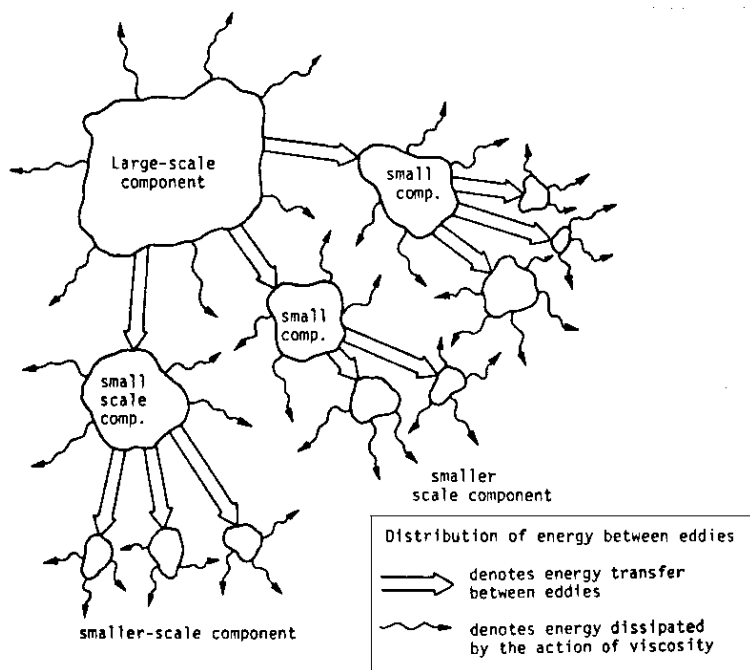
e da sua **variância** a "enstrophie" é:  $D = \frac{1}{2} \langle |\vec{\omega}'|^2 \rangle :$

$$\frac{\partial \rho D}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} D = - \text{div } \vec{j}_D + \vec{\sigma}_{\nabla D}$$

Exemplo (4): Kolmogorov - a **Cascata de Energias**



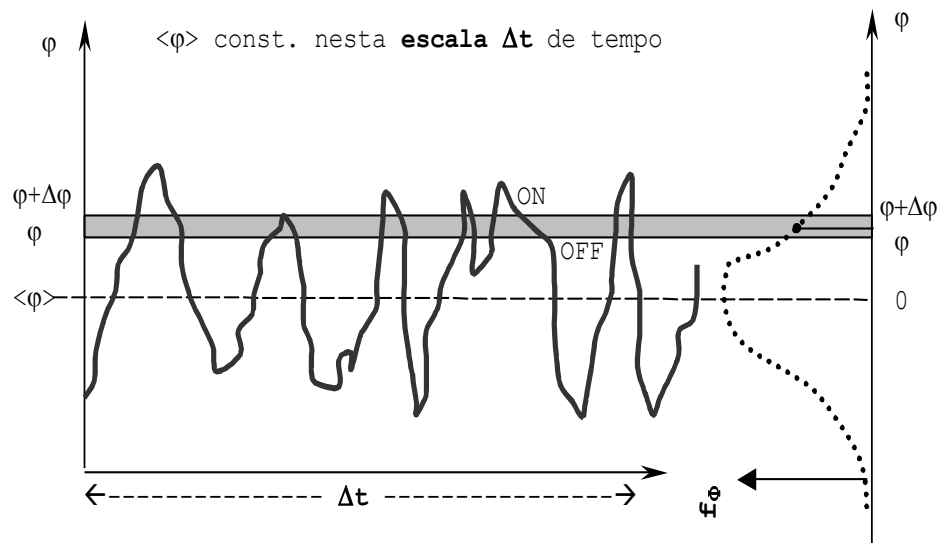
escala: macro                      transição                      micro  
 energia cinética macro                      turbulenta                      micro  
 proporcional:  $\nu$                        $k$                       T





Uma propriedade  $\phi$  pode variar no tempo e no espaço:  $\phi = \phi(t, \mathbf{r})$ .

A porcentagem do tempo que  $\phi$ , para um dado  $\mathbf{r}$ , permanece entre  $\phi$  e  $\phi + \Delta\phi$  é descrita por uma **PDF** (probability density function)  $f_\phi$ . Valores experimentais de  $f_\phi$  são facilmente obtidos com um osciloscópio.



Tennekes p.198

a) Análise **temporal** da PDF: A transformada de Fourier de  $f_\phi(t)$ :

$$F(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\phi(t) dt$$

permite a análise da intensidade de turbulência  $I = I(f_\phi)$  e consequentemente dos produtos de Reynolds  $\langle v' \phi' \dots \xi' \rangle$  (parte 2).

Para  $f_\phi =$  Gaussiana com variância  $\sigma$  tem-se:  $F(\phi) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\phi}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right)$

b) Análise **espacial** da PDF: Mapeando-se as PDFs no espaço e indo do espaço físico ( $\mathbf{r} \in \mathbf{Z}^3$ ) para o de Fourier ( $\mathbf{k} \in 2\pi/L \mathbf{Z}^3$ ; onde  $\mathbf{k}$  é o número de onda), uma expansão de  $f_\phi(\mathbf{r})$  em Series de Fourier pode ser desenvolvida:

$$f_\phi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \hat{f}_{\phi\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad \text{onde} \quad \hat{f}_{\phi\vec{k}} = \left\langle f_\phi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\rangle$$

existe um número de onda (frequência de corte)  $k$  onde a propriedade torna-se amortecida (smooth):

$$f_\phi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k} \leq K} \hat{f}_{\phi\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \sum_{\vec{k} > K} \hat{f}_{\phi\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \rightarrow \langle f_\phi \rangle \cong \sum_{\vec{k} > K} \hat{f}_{\phi\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

uma escala de turbulência no espaço  $\ell \approx k^{-1}$  pode então ser concebida.

A análise do espectro da energia  $E$  em função do número de onda  $k$  permite avaliar as escalas em que ocorrem a produção, o transporte e a dissipação das energias cinéticas macro, de turbulência e interna:

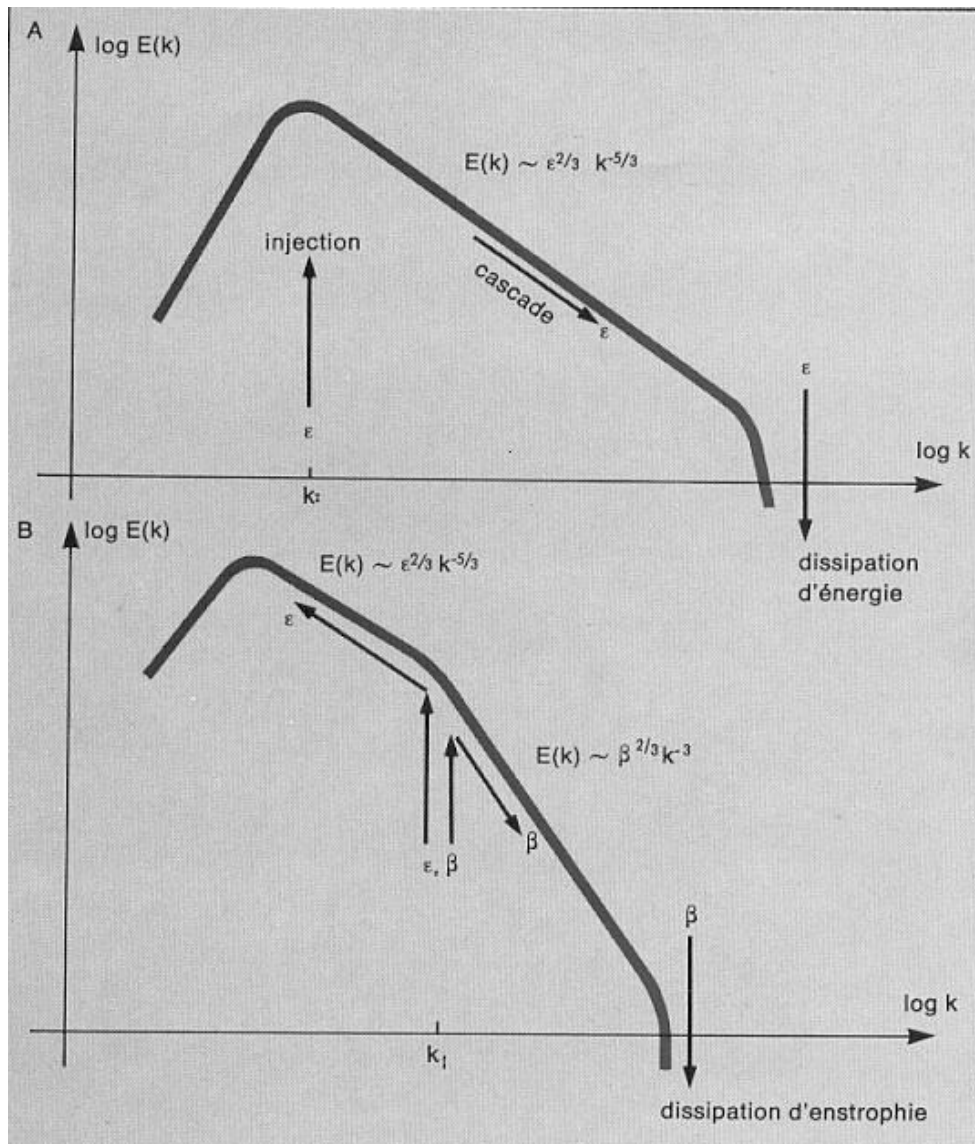
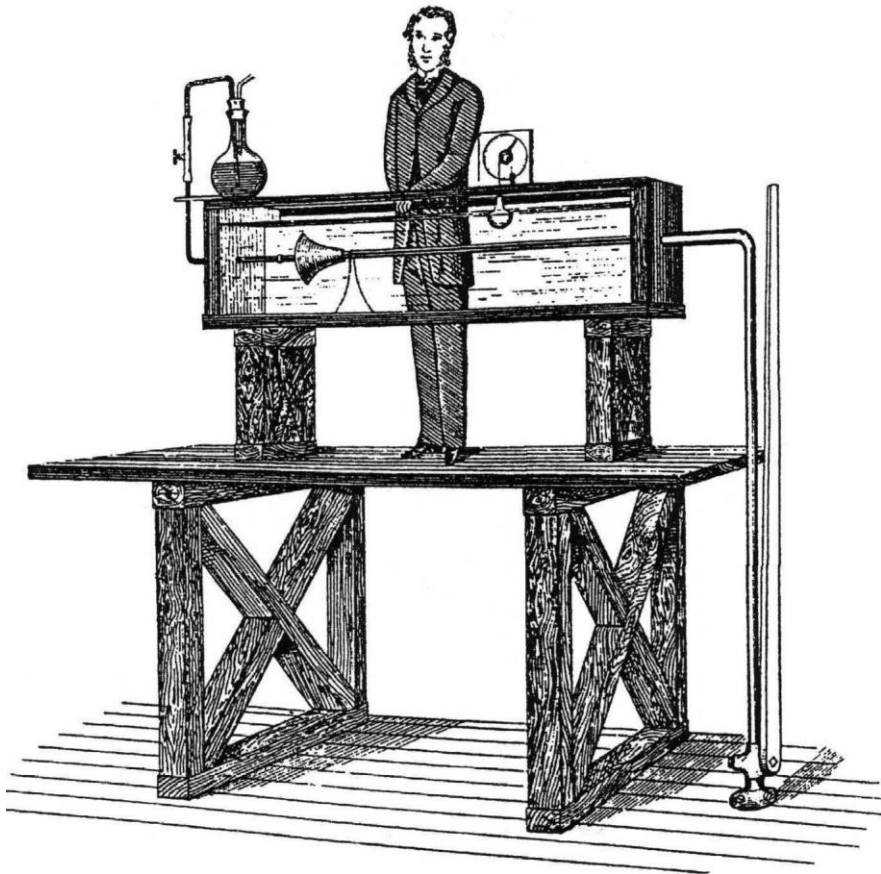


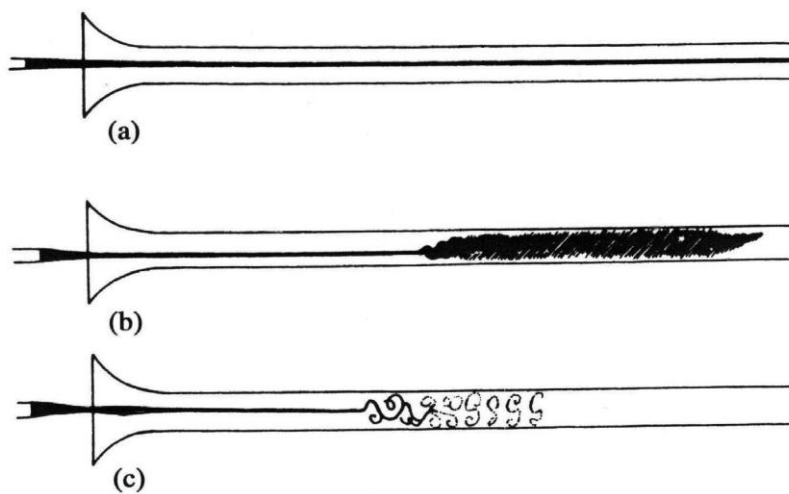
Figure 6. Pour expliquer la dynamique de la turbulence tridimensionnelle, Kolmogorov a introduit le concept de cascade d'énergie qui se concrétise par un spectre d'énergie en  $k^{-5/3}$  (A),  $k$  étant le nombre d'ondes. Pour établir cette théorie on suppose qu'il y a dans l'écoulement un apport permanent d'énergie dans les structures d'échelle  $1/K_i$ , à un taux  $\epsilon$ . L'allure du spectre illustre que l'énergie «cascade» vers les petites échelles dissipatives en dessous desquelles aucune instabilité ne peut se développer, en raison de l'influence prépondérante de la viscosité. Ce concept de cascade d'énergie s'effondre dans le cas de la turbulence bidimensionnelle, où les structures de l'écoulement sont des rouleaux parallèles et la vorticité des particules fluides se conserve le long de leur mouvement. R.H. Kraichnan lui a substitué celui de cascade d'entrophie, (moyenne du carré de la vorticité) (B). Sa théorie établit que l'entrophie cascade vers les petites échelles au taux d'injection  $\beta$ , le long d'un spectre en  $k^{-3}$ . L'autre caractéristique importante de la cascade d'entrophie est qu'elle constitue une sorte de «mur» infranchissable pour l'énergie injectée dans les grandes échelles. Ne pouvant se propager vers les petites échelles, elle va exciter des tourbillons de plus en plus gros le long d'un spectre suivant encore la loi de Kolmogorov. Ces mécanismes de cascades sont loin de faire l'unanimité parmi les spécialistes de la turbulence mais ils éclairent d'un jour nouveau les phénomènes bidimensionnels.

$K = \text{"wave number"}$

## PQI-5776 Fenômenos de Transporte I

AULA 8 - [parte 2/4] Turbulência: Modelagem Matemática Reynolds

The configuration of Reynolds's experiment on flow along a pipe.



Sketches of (a) laminar flow in a pipe, indicated by a dye streak; (b) transition to turbulent flow in a pipe; and (c) transition to turbulent flow as seen when illuminated by a spark. (From Reynolds, 1883, Figs. 3, 4 and 5.)

## I. Equações Gerais

A equação de conservação na forma generalizada e' :

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\varphi}{Dt} &= \frac{D\rho\varphi}{Dt} + \rho\varphi \operatorname{div} \vec{v} = \rho \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi \right) = \\ &= \frac{\partial\rho\varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{v}\varphi = -\operatorname{div} \vec{j}_\varphi + \dot{\sigma}_{v\varphi} \end{aligned} \quad [1]$$

se considerarmos (  $\varphi = 1$  ) a equação da continuidade e' obtida:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{v} = 0 \quad [2]$$

por outro lado sendo:

$$\vec{j}_\varphi = -\rho \lambda_\alpha \operatorname{grad} \varphi \quad [3]$$

em [1]:

$$\rho \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\rho\varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{v}\varphi = \operatorname{div} (\rho \lambda_\alpha \operatorname{grad} \varphi) + \dot{\sigma}_{v\varphi} \quad [4]$$

## II. O tratamento matemático da Turbulência

Considerando que no caso de um escoamento turbulento as suas propriedades possam ser referidas pelas suas medias temporais em um intervalo de tempo  $\Delta\tau$  característico da escala de turbulência e por flutuações em relação a esses valores médios:

$$\rho = \rho' + \bar{\rho} \quad [5]$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \bar{\vec{v}} \quad [6]$$

$$\varphi = \varphi' + \bar{\varphi} \quad [7]$$

integrando uma dessas propriedades genericamente denominada por  $\xi$  entre  $t$  e  $(t + \Delta\tau)$  e representando a media temporal nessa escala por:

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} \xi dt \quad [8]$$

a propriedade distributiva e' imediatamente demonstrada. A media da soma é a soma das medias. Se  $\xi = \chi + \zeta$  :

$$\langle \xi \rangle = \langle \chi + \zeta \rangle = \frac{1}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} (\chi + \zeta) dt = \frac{1}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} \chi dt + \frac{1}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} \zeta dt = \langle \chi \rangle + \langle \zeta \rangle$$

aplicando a média [8] nas grandezas escritas na forma das equações [5] a [7]:

$$\xi = \xi' + \bar{\xi} \quad [9]$$

resulta:

$$\langle \xi \rangle = \langle \bar{\xi} + \xi' \rangle = \langle \bar{\xi} \rangle + \langle \xi' \rangle \quad [10]$$

como a flutuação  $\xi'$  definida em torno da media entre  $t$  e  $(t + \Delta\tau)$  da definição [8] e' imediatamente consegüente que:

$$\langle \xi' \rangle = 0 \quad [11]$$

e então:

$$\langle \xi \rangle = \langle \bar{\xi} \rangle = \frac{1}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} \bar{\xi} dt \quad [12]$$

como  $\bar{\xi}$  e' constante entre  $t$  e  $t+\Delta\tau$  ele pode sair da integral:

$$\langle \xi \rangle = \frac{\bar{\xi}}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} dt = \bar{\xi} \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau} = \bar{\xi} \quad [13]$$

resumindo:

$$\boxed{\langle \xi \rangle = \langle \bar{\xi} \rangle = \bar{\xi} = \bar{\xi} \quad ; \quad \bar{\xi}' = 0 \quad ; \quad \overline{\bar{\xi} + \xi'} = \bar{\xi} + \bar{\xi}}$$

aplicando as propriedades da media temporal para um produto:

$$\langle \bar{\xi} \bar{\zeta} \rangle = \frac{1}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} \bar{\xi} \bar{\zeta} dt = \frac{\bar{\xi} \bar{\zeta}}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} dt = \bar{\xi} \bar{\zeta} \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau} = \bar{\xi} \bar{\zeta} \quad [14]$$

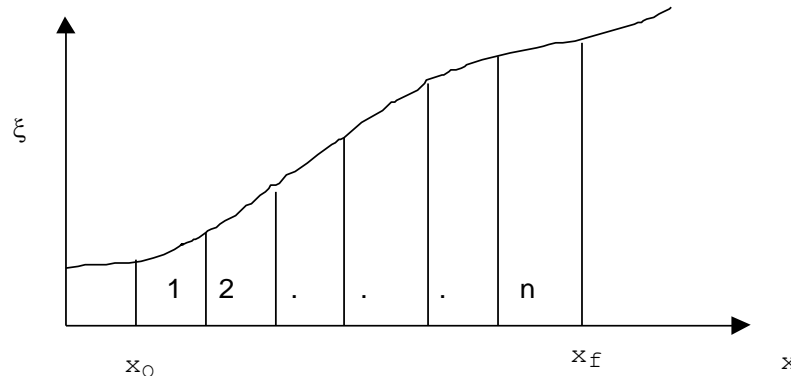
$$\langle \bar{\xi} \zeta' \rangle = \frac{1}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} \bar{\xi} \zeta' dt = \frac{\bar{\xi}}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} \zeta' dt = 0 \quad [15]$$

resumindo:

$$\boxed{\overline{\bar{\xi} \bar{\zeta}} = \bar{\xi} \bar{\zeta} \quad ; \quad \overline{\bar{\xi} \zeta'} = 0}$$

**III. A integração de propriedades turbulentas**

Uma integral definida de uma função  $\xi(x)$  pode ser definida por:



$$\int_{x_0}^{x_f} \xi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi \left( x_f - \frac{i(x_f - x_0)}{n} \right) \frac{(x_f - x_0)}{n}$$

Aplicando a definição da média temporal turbulenta a essa integral:

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{x_0}^{x_f} \xi(x) dx \right\rangle &= \frac{1}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi \left( x_f - \frac{i(x_f - x_0)}{n} \right) \frac{(x_f - x_0)}{n} dt = \\ &= \frac{1}{\Delta\tau} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi \left( x_f - \frac{i(x_f - x_0)}{n} \right) \frac{(x_f - x_0)}{n} \frac{t + \Delta\tau}{m} \end{aligned}$$

como  $n$ ,  $m$  e  $\Delta\tau$  são independentes os limites e somatorios podem ser comutados:

$$\begin{aligned} \overline{\int_{x_0}^{x_f} \xi(x) dx} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta\tau} \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \xi \left( x_f - \frac{i(x_f - x_0)}{n} \right) \frac{t + \Delta\tau}{m} \right\} \frac{(x_f - x_0)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} \xi \left( x_f - \frac{i(x_f - x_0)}{n} \right) dt \right\} \frac{(x_f - x_0)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \overline{\xi \left( x_f - \frac{i(x_f - x_0)}{n} \right)} \frac{(x_f - x_0)}{n} = \int_{x_0}^{x_f} \overline{\xi(x)} dx \end{aligned}$$

na forma indefinida:

$$\boxed{\int \xi dx = \int \bar{\xi} dx}$$

IV. **A diferencial de Propriedades Turbulentas**

Sendo uma propriedade  $\xi$  função de:

$$\xi = \xi(\bar{r}, t)$$

a sua diferencial e' dada por:

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial \bar{r}} d\bar{r} + \frac{\partial \xi}{\partial t} dt$$

onde:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial \bar{r}}\right)_t = \lim_{\Delta \bar{r} \rightarrow 0} \left( \frac{\xi(\bar{r} + \Delta \bar{r}) - \xi(\bar{r})}{\Delta \bar{r}} \right)_t = \text{grad } \xi$$

e:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{\bar{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right)_{\bar{r}}$$

V. **A derivação temporal Euleriana de propriedades turbulentas**

Aplicando a definição da media temporal sobre a derivada temporal e com a regra da cadeia:

$$\left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial(\bar{\xi} + \xi')}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \xi'}{\partial t} \right\rangle \quad [16]$$

abrindo o primeiro termo do ultimo membro de [9]:

$$\left\langle \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} dt = \frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\xi}(t + \Delta t) - \bar{\xi}(t)}{\Delta t} \right] dt$$

considerando a escala de tempos da turbulência  $\Delta \tau$  constante ela pode ser introduzida dentro da integral e dentro do limite. Como também a escala de tempos da turbulência e' muito maior que e portanto independente da escala de tempos da diferenciação  $dt$  então pode-se comutar a integral entre  $t$  e  $(t + \Delta \tau)$  com o limite para  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} \right\rangle &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \bar{\xi}(t+\Delta t) dt - \frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \bar{\xi}(t) dt \right]}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \bar{\xi}(t+\Delta t) \rangle - \langle \bar{\xi}(t) \rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{\xi}(t+\Delta t) - \bar{\xi}(t)}{\Delta t} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} \end{aligned} \quad [17]$$

analogamente para o segundo termo do ultimo membro de [9]:

$$\left\langle \frac{\partial \xi'}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \frac{\partial \xi'}{\partial t} dt = \frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi'(t + \Delta t) - \xi'(t)}{\Delta t} \right] dt$$

comutando a integral entre t e (t + Δτ) com o limite para Δt → 0:

$$\left\langle \frac{\partial \xi'}{\partial t} \right\rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \xi'(t+\Delta t) dt - \frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \xi'(t) dt \right]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \xi'(t+\Delta t) \rangle - \langle \xi'(t) \rangle}{\Delta t}$$

de [8a]:

$$\left\langle \frac{\partial \xi'}{\partial t} \right\rangle = 0 \quad [18]$$

introduzindo [10] e [11] em [9] obtém-se que a media temporal da derivada temporal Euleriana e' a derivada temporal Euleriana da media temporal:

$$\left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} \quad [19]$$

resumindo:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial \bar{\xi}'}{\partial t} = 0}$$

## VI. A derivação espacial de propriedades turbulentas

A derivada espacial e' :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \vec{r}} = \text{grad } \xi$$

Aplicando a definição da media temporal para derivada **espacial**:

$$\left\langle \frac{\partial \xi}{\partial \vec{r}} \right\rangle = \frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial \vec{r}} \right] dt = \frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \left[ \lim_{\Delta \vec{r} \rightarrow 0} \frac{\xi(\vec{r} + \Delta \vec{r}) - \xi(\vec{r})}{\Delta \vec{r}} \right] dt$$

como a derivada no espaço e' Euleriana e portanto parcial ela e' independente do tempo e portanto pode-se comutar o limite para Δr̄ → 0 com a integral entre t e t + Δt:

$$\frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \left[ \lim_{\Delta \vec{r} \rightarrow 0} \frac{\xi(\vec{r} + \Delta \vec{r}) - \xi(\vec{r})}{\Delta \vec{r}} \right] dt = \lim_{\Delta \vec{r} \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \xi(\vec{r} + \Delta \vec{r}) dt - \frac{1}{\Delta \tau} \int_t^{t+\Delta \tau} \xi(\vec{r}) dt \right]}{\Delta \vec{r}}$$



obtem-se que a média temporal da derivada espacial:

$$\left\langle \frac{\partial \xi}{\partial \vec{r}} \right\rangle = \lim_{\Delta \vec{r} \rightarrow 0} \frac{\langle \xi(\vec{r} + \Delta \vec{r}) \rangle - \langle \xi(\vec{r}) \rangle}{\Delta \vec{r}} = \frac{\partial \langle \xi \rangle}{\partial \vec{r}} \quad [20]$$

é a derivada espacial da media temporal. Conseqüentemente:

$$\langle \text{grãd } \xi \rangle = \text{grãd } \langle \xi \rangle \quad [21]$$

resumindo:

$$\overline{\text{grãd } \xi} = \text{grãd } \bar{\xi} \quad ; \quad \overline{\text{grad } \xi'} = 0$$

### VII. A derivação temporal Lagrangeana de propriedades turbulentas

Aplicando a definição da media temporal sobre a derivada temporal Lagrangeana:

$$\left\langle \frac{D\xi}{Dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grãd } \xi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle + \langle \vec{v} \cdot \text{grãd } \xi \rangle \quad [22]$$

o produto escalar do gradiente com a velocidade e':

$$\begin{aligned} \langle \vec{v} \cdot \text{grãd } \xi \rangle &= \langle (\bar{\vec{v}} + \vec{v}') \cdot \text{grãd } (\bar{\xi} + \xi') \rangle = \\ &= \langle \bar{\vec{v}} \cdot \text{grãd } \bar{\xi} \rangle + \langle \bar{\vec{v}} \cdot \text{grãd } \xi' \rangle + \langle \vec{v}' \cdot \text{grãd } \bar{\xi} \rangle + \langle \vec{v}' \cdot \text{grãd } \xi' \rangle = \\ &= \bar{\vec{v}} \cdot \text{grãd } \bar{\xi} + \bar{\vec{v}} \cdot \langle \text{grãd } \xi' \rangle + \langle \vec{v}' \cdot \text{grãd } \bar{\xi} \rangle + \langle \vec{v}' \cdot \text{grãd } \xi' \rangle = \\ &= \bar{\vec{v}} \cdot \text{grãd } \bar{\xi} + \overline{\vec{v}' \cdot \text{grãd } \xi'} \end{aligned} \quad [23]$$

em [22]:

$$\left\langle \frac{D\xi}{Dt} \right\rangle = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \bar{\vec{v}} \cdot \text{grãd } \bar{\xi} + \overline{\vec{v}' \cdot \text{grad } \xi'} \quad [24]$$

para a derivada lagrangeana da media:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D\bar{\xi}}{Dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grãd } \bar{\xi} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + (\bar{\vec{v}} + \vec{v}') \cdot \text{grãd } \bar{\xi} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} \right\rangle + \langle \bar{\vec{v}} \cdot \text{grãd } \bar{\xi} \rangle + \langle \vec{v}' \cdot \text{grãd } \bar{\xi} \rangle = \\ &= \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \bar{\vec{v}} \cdot \text{grãd } \bar{\xi} + \langle \vec{v}' \cdot \text{grãd } \bar{\xi} \rangle = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \bar{\vec{v}} \cdot \text{grãd } \bar{\xi} \end{aligned} \quad [25]$$

para a derivada lagrangeana da flutuação:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D\xi'}{Dt} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \xi'}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad } \xi' \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{\xi}'}{\partial t} + (\bar{v} + \bar{v}') \cdot \text{grad } \xi' \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial \xi'}{\partial t} \right\rangle + \langle \bar{v} \cdot \text{grad } \xi' \rangle + \langle \bar{v}' \cdot \text{grad } \xi' \rangle = \overline{\bar{v}' \cdot \text{grad } \xi'} \end{aligned} \quad [26]$$

combinando [24] e [25]:

$$\left\langle \frac{D\xi}{Dt} \right\rangle = \left\langle \frac{D\bar{\xi}}{Dt} \right\rangle + \left\langle \frac{D\xi'}{Dt} \right\rangle = \left\langle \frac{D\bar{\xi}}{Dt} \right\rangle + \overline{\bar{v}' \cdot \text{grad } \xi'} \quad [27]$$

por outro lado:

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{\xi}}{Dt} &= \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{\xi} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + (\bar{v} + \bar{v}') \cdot \text{grad } \bar{\xi} = \\ &= \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{\xi} + \bar{v}' \cdot \text{grad } \bar{\xi} \end{aligned}$$

mas de [15 e 17]:

$$\left\langle \frac{D\bar{\xi}}{Dt} \right\rangle = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{\xi}$$

tem-se:

$$\frac{D\bar{\xi}}{Dt} = \left\langle \frac{D\bar{\xi}}{Dt} \right\rangle + \bar{v}' \cdot \text{grad } \bar{\xi}$$

resumindo:

$\frac{D\bar{\xi}}{Dt} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{\xi} = \frac{D\bar{\xi}}{Dt} + \bar{v}' \cdot \text{grad } \bar{\xi}$
$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{D\bar{\xi}}{Dt} + \overline{\bar{v}' \cdot \text{grad } \xi'} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{\xi} + \overline{\bar{v}' \cdot \text{grad } \xi'}$
$\frac{D\xi'}{Dt} = \overline{\bar{v}' \cdot \text{grad } \xi'}$
$\frac{D\bar{\xi}}{Dt} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{\xi}$

VIII. **A equação da continuidade Euleriana turbulenta**

introduzindo [5] e [6] em [2]:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \text{div} (\bar{\rho} + \rho') (\bar{\vec{v}} + \vec{v}') = 0 \quad [28]$$

aplicando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div} (\bar{\rho} \bar{\vec{v}} + \bar{\rho} \vec{v}' + \rho' \bar{\vec{v}} + \rho' \vec{v}') = 0 \quad [29]$$

aplicando a definição da media [8]:

$$\left\langle \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \text{div} (\bar{\rho} \bar{\vec{v}} + \bar{\rho} \vec{v}' + \rho' \bar{\vec{v}} + \rho' \vec{v}') \right\rangle = 0 \quad [30]$$

aplicando [12] e [13] em [30] tem-se:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div} \bar{\rho} \bar{\vec{v}} + \text{div} \overline{\bar{\rho} \vec{v}'} + \text{div} \overline{\rho' \bar{\vec{v}}} + \text{div} \overline{\rho' \vec{v}'} = 0 \quad [31]$$

considerando [14] e [15]:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div} \bar{\rho} \bar{\vec{v}} + \text{div} \overline{\rho' \vec{v}'} = 0} \quad [32]$$

que é a equação da continuidade Euleriana para escoamentos turbulentos. Se for feita a hipótese de que as flutuações da densidade são nulas:

$$\rho' \cong 0 \quad [33]$$

a equação [32] fica:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \text{div} \bar{\rho} \bar{\vec{v}} = 0 \quad [34]$$

que é a equação da continuidade Euleriana para **fluidos** incompressíveis. Como se vê a eq. [34] é a mesma que [2] onde apenas foram substituídos os valores instantâneos pelos valores médios.

Observe-se que a hipótese [33] somente tem significado físico consistente para um fluido incompressível onde:

$$\rho' = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \text{grad} \bar{\rho} = 0 \quad [35]$$

assim a equação [34] fica para escoamentos incompressíveis:

$$\text{div} \bar{\vec{v}} = 0 \quad [36]$$

IX. A equação da continuidade Lagrangeana turbulenta

introduzindo [5] e [6] em [2]:

$$\frac{D(\bar{\rho} + \rho')}{Dt} + (\bar{\rho} + \rho') \operatorname{div}(\bar{\vec{v}} + \vec{v}') = 0 \quad [37]$$

aplicando a regra da cadeia e a definição da media [8]:

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \overline{\vec{v}' \cdot \operatorname{grad} \rho'} + \bar{\rho} \operatorname{div} \bar{\vec{v}} + \overline{\bar{\rho} \operatorname{div} \vec{v}'} + \overline{\rho' \operatorname{div} \bar{\vec{v}}} + \overline{\rho' \operatorname{div} \vec{v}'} = 0 \quad [38]$$

considerando [14] e [15]:

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \overline{\vec{v}' \cdot \operatorname{grad} \rho'} + \bar{\rho} \operatorname{div} \bar{\vec{v}} + \overline{\rho' \operatorname{div} \vec{v}'} = 0 \quad [39]$$

agrupando os termos de flutuações:

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \bar{\rho} \operatorname{div} \bar{\vec{v}} + \overline{\rho' \operatorname{div} \vec{v}'} + \overline{\vec{v}' \cdot \operatorname{grad} \rho'} = 0 \quad [40]$$

com a regra da cadeia:

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \bar{\rho} \operatorname{div} \bar{\vec{v}} + \overline{\operatorname{div} \rho' \vec{v}'} = 0 \quad [41]$$

de [21]:

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \bar{\rho} \operatorname{div} \bar{\vec{v}} + \operatorname{div} \overline{\rho' \vec{v}'} = 0 \quad [42]$$

que é a equação da continuidade Lagrangeana para escoamentos turbulentos.

Se fizermos a hipótese de fluido incompressível [33] a equação [42] fica:

$$\boxed{\frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \bar{\rho} \operatorname{div} \bar{\vec{v}} = 0} \quad [43]$$

que é a equação da continuidade onde apenas foram substituídos os valores instantâneos pelos valores médios. Para **fluidos** incompressíveis:

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt} = 0 \quad [44]$$

e portanto:

$$\operatorname{div} \bar{\vec{v}} = 0 \quad [45]$$

Consideraremos sempre válida a seguir a hipótese [33].  
Aplicando  $\xi = \rho$  em [27]:

$$\overline{\frac{D\rho}{Dt}} = \frac{D\bar{\rho}}{Dt} + \overline{\vec{v}' \cdot \text{grad } \rho'} \quad [46]$$

que com [33]:

$$\overline{\frac{D\rho}{Dt}} = \frac{D\bar{\rho}}{Dt} \quad [47]$$

por outro lado de [21]:

$$\left\langle \frac{D\rho}{Dt} \right\rangle = \frac{D\bar{\rho}}{Dt} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{\rho} + \overline{\vec{v}' \cdot \text{grad } \rho'} \quad [48]$$

então com [33]:

$$\boxed{\frac{D\bar{\rho}}{Dt} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad } \bar{\rho}} \quad [49]$$

#### X . A equação de conservação generalizada turbulenta (fluidos incompressíveis $\rho' = 0$ )

Introduzindo [5] a [7] e [33] em [4]:

$$\boxed{\rho \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} \varphi = \text{div } (\rho \lambda_\phi \text{ grad } \varphi) + \dot{\sigma}_{V\phi}} \quad [50]$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} (\varphi' + \bar{\varphi})}{\partial t} + \text{div } \bar{\rho} (\varphi' + \bar{\varphi}) (\bar{v}' + \bar{v}) = \text{div } \bar{\rho} (\lambda_\phi \text{ grad}(\varphi' + \bar{\varphi})) + \dot{\sigma}'_{V\phi} + \overline{\dot{\sigma}_{V\phi}}$$

re-arranjando:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \varphi'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\varphi}}{\partial t} + \text{div } \bar{\rho} (\varphi' \bar{v}' + \bar{\varphi} \bar{v}' + \varphi' \bar{v} + \bar{\varphi} \bar{v}) = \text{div } \bar{\rho} \lambda_\phi \text{ grad}(\varphi' + \bar{\varphi}) + \overline{\dot{\sigma}_{V\phi}}$$

integrando entre  $t$  e  $(t + \Delta t)$  tem-se e com [10] e [11]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{\rho} \langle \varphi' \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \langle \bar{\varphi} \rangle}{\partial t} + \text{div } \bar{\rho} \left[ \langle \varphi' \bar{v}' \rangle + \langle \bar{\varphi} \bar{v}' \rangle + \langle \varphi' \bar{v} \rangle + \langle \bar{\varphi} \bar{v} \rangle \right] = \\ & = \text{div } \bar{\rho} \lambda_\phi \text{ grad} \left( \langle \varphi' \rangle + \langle \bar{\varphi} \rangle \right) + \langle \overline{\dot{\sigma}_{V\phi}} \rangle \end{aligned}$$

considerando [14] e [15]:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \text{div} \left[ \overline{\vec{v}' \varphi'} + \bar{v} \bar{\varphi} \right] = \text{div} \left[ \lambda_\phi \text{ grad } \bar{\varphi} \right] + \overline{\dot{\sigma}_{M\phi}} \quad [51]$$

transferindo para o segundo membro os termos da média dos produtos das flutuações (produtos de Reynolds):

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \text{div } \bar{\vec{v}} \phi = \text{div} \left[ \lambda_{\phi} \text{grad } \bar{\phi} - \overline{\phi' \vec{v}'} \right] + \overline{\dot{\sigma}_{M\phi}} \quad [52]$$

denomina-se problema de **fechamento** à definição de um Modelo para o equacionamento dos produtos de Reynolds.

#### XI. Escoamento de Fluidos COMPRESSÍVEIS

Caso  $\rho$  varie também:

$$\rho = \bar{\rho} + \rho'$$

em toda a dedução anterior deveria aparecer muitos mais termos inclusive a média tripla:

$$\overline{\rho' \phi' \vec{v}'}$$

para este caso, foi desenvolvida a alternativa de definição da velocidade média proposta por **FAVRE**:

$$\tilde{\phi} = \{\phi\} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\rho}$$

a dedução é análoga e recai numa equação semelhante:

$$\frac{\partial \{\phi\}}{\partial t} + \text{div} \{\vec{v} \phi\} = \text{div} \left[ \lambda_{\phi} \text{grad } \{\phi\} - \{\phi' \vec{v}'\} \right] + \left\{ \dot{\sigma}_{M\phi} \right\} \quad [52-a]$$

## PQI-5776 Fenomenos de Transporte I

AULA 8 - [parte 3 de 4] Turbulencia: Modelos

A equação de conservação generalizada **turbulenta** foi deduzida para (**fluidos incompressíveis**  $\rho' = 0$ ):

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \text{div } \bar{\vec{v}} \bar{\phi} = \text{div} \left[ \lambda_{\phi} \text{grad } \bar{\phi} - \overline{\phi' \vec{v}'} \right] + \overline{\dot{\sigma}_{M\phi}} \quad [1]$$

denomina-se "**closure problem**" a procura de um sistema fechado de equações inclusive para os produtos de Reynolds.

1) Conceituação de **Boussinesq** (1877): admitindo artificialmente um modelo para os produtos de Reynolds da forma difusiva:

$$\overline{\phi' \vec{v}'} = - \lambda_{\phi T} \text{grad } \bar{\phi} \quad [2]$$

onde  $\lambda_{\phi T}$  é a denominada difusividade turbulenta (**eddy**) que é função do estado local da turbulencia.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \text{div } \bar{\vec{v}} \bar{\phi} &= \text{div} \left[ \lambda_{\phi} \text{grad } \bar{\phi} + \lambda_{\phi T} \text{grad } \bar{\phi} \right] + \overline{\dot{\sigma}_{M\phi}} = \\ &= \text{div} \left[ \lambda_{\phi} + \lambda_{\phi T} \right] \text{grad } \bar{\phi} + \overline{\dot{\sigma}_{M\phi}} \end{aligned} \quad [3]$$

considerando a difusividade turbulenta muito maior que a laminar:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \text{div } \bar{\vec{v}} \bar{\phi} = \text{div} \left[ \lambda_{\phi T} \text{grad } \bar{\phi} \right] + \overline{\dot{\sigma}_{M\phi}} \quad [4]$$

este tratamento sugere uma linguagem para a propositura de modelos de turbulencia. Os mais importantes são:

2) Modelo **do comprimento de mistura de Prandtl** (1925)

$$\lambda_{\vec{v}T} = \nu_T = \ell_m^2 \left| \text{grad } \bar{\vec{v}} \right| \quad [5]$$

onde a escala de comprimento da turbulência é caracterizada pelo comprimento de mistura  $\ell_m$  deve ser prescrito algebricamente.

Exemplos:

plane mixing layer	$\ell_m = 0,07 \delta$	$[\delta = \text{layer width}]$
plane jet	$\ell_m = 0,09 \delta$	$[\delta = \text{width of } 1/2 \text{ jet}]$
fan jet	$\ell_m = 0,0125 \delta$	$[\delta = \text{width of } 1/2 \text{ jet}]$
round jet	$\ell_m = 0,075 \delta$	$[\delta = \text{width of } 1/2 \text{ jet}]$

van Driest (1956):

$$\text{near a wall} \quad \ell_m = ky \left[ 1 - \exp \left( - \frac{y \sqrt{\tau_s/\rho}}{26 \nu} \right) \right]$$

3) Hipotese da **similaridade de von Karman** (1930)

Propõe para  $l_m$  uma relação com propriedades do escoamento:

$$l_m \propto \frac{\partial v_x}{\partial y} / \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad [6]$$

Dispensa a necessidade de prescrever  $l_m$  mas funciona bem somente próximo das paredes.

4) Modelo da similaridade de **Prandtl** (1945)

Propõe uma equação diferencial para  $v_T$ :

$$v_T = l \sqrt{k} \quad [7]$$

onde  $k$  é a energia cinética de turbulência e a escala de comprimento da turbulência  $l$  deve ser prescrita algebricamente.

4.1) **energia cinética de turbulência**  $k$ .

Dentro da energia média já esta contabilizada uma parcela de energia cinética correspondente a velocidade média:

$$\bar{e} = \bar{u} + \bar{e}_p + \bar{e}_c = c_v \bar{T} + \bar{e}_p + \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{2}$$

no entanto a energia cinética total  $e'$ :

$$e_c = \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{2} = \frac{(\bar{v} + \bar{v}') \cdot (\bar{v} + \bar{v}')}{2} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{v} + \bar{v}' \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{v}' + \bar{v}' \cdot \bar{v}'}{2}$$

que ao se tomar a média os termos com uma flutuação apenas somem:

$$\overline{e_c} = \frac{\overline{\bar{v} \cdot \bar{v}}}{2} + \frac{\overline{\bar{v}' \cdot \bar{v}'}}{2} = \frac{\overline{\bar{v} \cdot \bar{v}}}{2} + \overline{e_{cT}}$$

denomina-se energia cinética de turbulência à parcela:

$$k = \overline{e_{cT}} = \frac{\overline{\bar{v}' \cdot \bar{v}'}}{2} \quad [8]$$

que pode submeter-se à equação de conservação. Após varias hipóteses simplificadoras o fechamento fica:

$$\frac{Dk}{Dt} = \text{div} \left( \frac{v_T}{\sigma_k} \text{grad } k \right) + v_T |\text{grad } \bar{v}|^2 - c_D \frac{k^{3/2}}{l} \quad [9]$$

onde os parametros são ajustados experimentalmente para cada tipo de escoamento:

$$\text{near wall:} \quad \sigma_k \approx 1 ; \quad c_D \approx 0,08 ; \quad l \approx 0,2$$



### 5) modelo **k-ε**

Seguindo uma linguagem de equações de conservação a de  $k$  seria, para um escoamento turbulento incompressível [1]:

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \text{div } \bar{v} \bar{k} = \text{div} \left[ \lambda_k \text{grad } \bar{k} - \overline{k' \bar{v}'} \right] + \overline{\dot{\sigma}_{M_k}} \quad [10]$$

Lauder e Spalding sugerem que o fechamento do produto de Reynolds de  $\mathbf{v}'k'$  possa ser descrito por uma dissipação de  $k$ :

$$\varepsilon = \text{div} \left[ \overline{k' \bar{v}'} \right] \quad [11]$$

que, por sua vez, submete-se a sua própria eq. de conservação:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div } \bar{v} \varepsilon = \text{div} \left[ \lambda_\varepsilon \text{grad } \varepsilon - \overline{k' \varepsilon'} \right] + \overline{\dot{\sigma}_{M_\varepsilon}} \quad [12]$$

consideram ainda que a difusividade e produção de  $k$  são:

$$\lambda_k = \frac{\nu_T}{\sigma_k} \quad ; \quad \overline{\dot{\sigma}_{V_k}} = -\rho \nu_T (\text{grad } \bar{v} : \text{grad } \bar{v}) = P_k \quad [13]$$

e para a dissipação:

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \quad ; \quad \text{div } k' \varepsilon' = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{\dot{\sigma}_{M_k}} \quad ; \quad \overline{\dot{\sigma}_{M_\varepsilon}} = C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad [14]$$

introduzindo [11] e [13] em [10] e [14] em [12] obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \text{div } \bar{v} \bar{k} = \text{div} \frac{\nu_T}{\sigma_k} \text{grad } \bar{k} + P_k - \varepsilon \quad [15]$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div } \bar{v} \varepsilon = \text{div} \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \text{grad } \varepsilon + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad [16]$$

onde a viscosidade turbulenta é dada por:

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad [17]$$

Assim todas as equações de conservação necessárias para a solução de um escoamento reativo turbulento (a continuidade não o e') podem ser escritas na forma generalizada e portanto podem ser resolvidas por qualquer resolvidor genérico de equações diferenciais parciais simultâneas. Os parâmetros são ajustados experimentalmente para cada escoamento. Valores típicos são:

$$\sigma_k = 1,0 \quad ; \quad \sigma_\varepsilon = 1,217 \quad ; \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44 \quad ; \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92 \quad ; \quad C_\mu = 0.09$$

Este modelo funciona bem **longe da parede**, assim ele deve ser combinado com outro que funcione bem perto da parede como o de mistura de Prandtl.

PQI-5776 Fenômenos de Transporte I

AULA 8 - [parte 4 de 4] Turbulência: Aplicações

A equação de conservação generalizada turbulenta ( $\rho' = 0$ ) é:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \text{div } \bar{\vec{v}} \bar{\phi} = \text{div} [\lambda_{\phi} + \lambda_{\phi T}] \text{grad } \bar{\phi} + \overline{\sigma_{M\phi}} \quad [1]$$

a difusividade turbulenta pode ser escrita em função da viscosidade cinemática turbulenta definindo-se o numero de Prandtl turbulento para a propriedade  $\phi$ :

$$\text{Pr}_{\phi T} = \frac{\nu_T}{\lambda_{\phi T}} \quad [2]$$

Introduzindo [2] em [1]:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \text{div } \bar{\vec{v}} \bar{\phi} = \text{div} [\lambda_{\phi} + (\rho \text{Pr}_{\phi T})^{-1} \nu_T] \text{grad } \bar{\phi} + \overline{\sigma_{M\phi}} \quad [3]$$

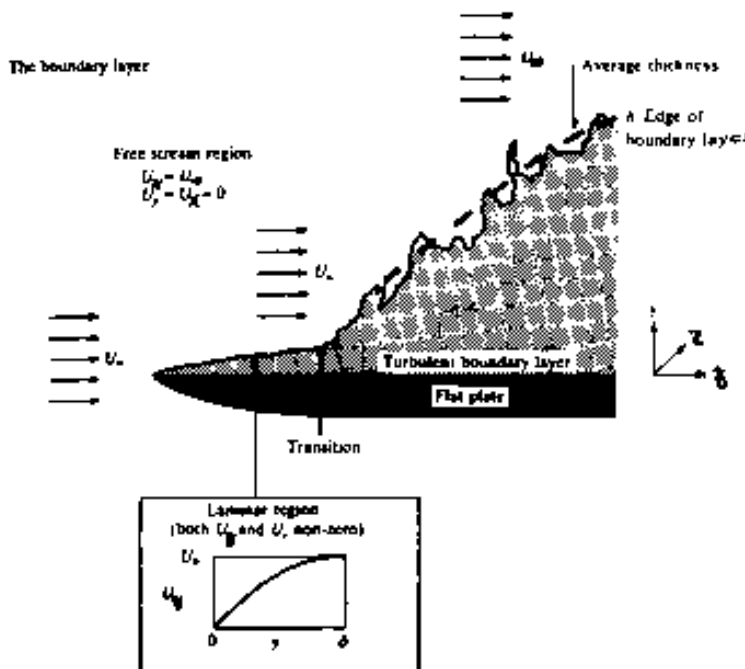
e admitindo o modelo de mistura de Prandtl generalizado:

$$\lambda_{\phi T} = (\rho \text{Pr}_{\phi T})^{-1} \ell_m^2 |\text{grad } \bar{\vec{v}}| \quad [4]$$

obtem-se:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \text{div } \bar{\vec{v}} \bar{\phi} = \text{div} \left\{ \lambda_{\phi} + (\rho \text{Pr}_{\phi T})^{-1} \ell_m^2 |\text{grad } \bar{\vec{v}}| \right\} \text{grad } \bar{\phi} + \overline{\sigma_{M\phi}} \quad [5]$$

- 1) Escoamento unidimensional sobre uma superfície em estado estacionario (parede plana, tubo desenvolvido)



$$f = \frac{16}{\text{Re}}$$

$$f = 0,079 \text{Re}^{-1/4}$$

Considerando um escoamento em estado estacionário sem produção:

$$\text{div } \bar{v} \bar{\varphi} = \text{div} \left\{ \lambda_{\Phi} + (\rho \text{Pr}_{\Phi T})^{-1} \ell_m^2 \left| \text{grad } \bar{v} \right| \right\} \text{grad } \bar{\varphi} \quad [6]$$

fora da subcamada limite laminar as seguintes hipóteses simplificadoras são geralmente assumidas:

a) a difusividade laminar é desprezável frente a turbulenta

$$\lambda_{\Phi} \ll \lambda_{\Phi T} \quad [7]$$

b) o comprimento de mistura varia linearmente com a distância  $y$  da parede:

$$\ell_m = \alpha y \quad [8]$$

onde  $\alpha$  é uma constante universal.

c) Como a subcamada limite laminar é extremamente fina os transportes na parede e na região turbulenta são iguais:

$$\bar{j}_{\Phi} = -\rho \lambda_{\Phi} \text{grad } \varphi = \bar{j}_{\Phi w} = -\rho \lambda_{\Phi} (\text{grad } \varphi)_{y=0} \quad [9]$$

aplicando [7] e [8] em [6]:

$$\text{div } \bar{v} \bar{\varphi} = \text{div} \alpha^2 y^2 \rho \text{Pr}_{\Phi T} \text{grad } \bar{\varphi} \left| \text{grad } \bar{v} \right| \quad [10]$$

para  $\varphi = \mathbf{v} = \mathbf{v}_z$  :

$$\text{div } \bar{v} \bar{v} = \text{div} \alpha^2 y^2 \rho \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right)^2 = \text{div } \bar{\tau} = \text{div } \bar{\tau}_w \quad [11]$$

igualando os argumentos dos divergentes e tirando a raiz:

$$y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \rightarrow \text{d } \bar{v}_z = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{dy}{y} \quad [12]$$

integrando:

$$\bar{v}_z = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\alpha} \ln y + \text{cte} \quad [13]$$

adimensionalizando  $y$  e  $v_z$ :

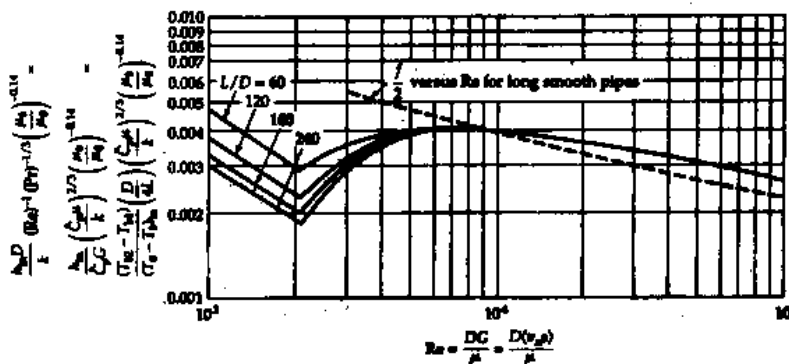
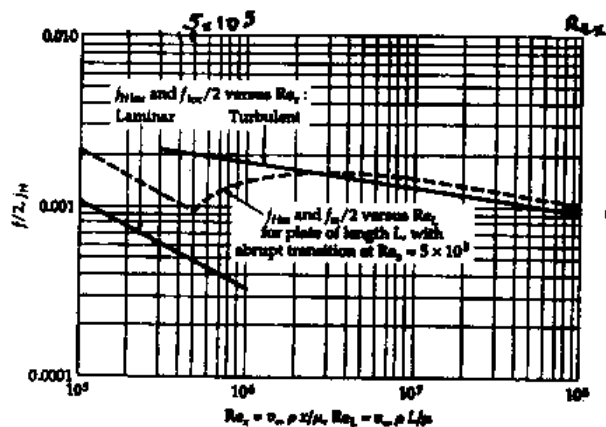
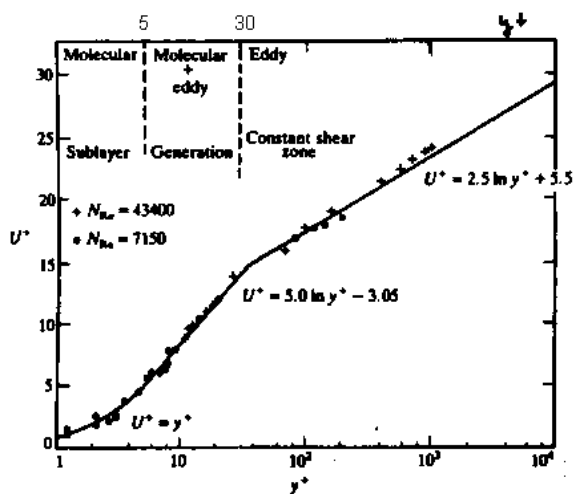
$$y^+ = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \frac{y}{\mu} \sqrt{\rho \tau_w} \quad \text{e} \quad \bar{v}_z^+ = \frac{\bar{v}_z}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \quad [14]$$

tem-se então:

$$\bar{v}_z^+ = \frac{1}{\alpha} \ln y^+ + \text{cte} \quad [15]$$

a integração desta equação é feita em tres (as vezes quatro) etapas considerando a existencia arbitraria de subcamadas correspondentes que justificam as condições de contorno e hipóteses simplificadoras.

Região	subcamada	transição	"Core" turbulento
Mecanismo	molecular	molecular + eddy	eddy
propriedade	$\lambda_\Phi$	$\lambda_\Phi + \lambda_{\Phi T}$	$\lambda_{\Phi T}$
$y^+$	$y^+$	$5 \ln y^+ - 3,05$	$2,5 \ln y^+ + 5,5$
$y^+ \text{ min}$	0	5	30
$y^+ \text{ max}$	5	30	$\infty$



$$f = \frac{N_{sp}}{Re^{1/3}}$$

valido p/ laminar com  $Re Pa \frac{D}{L} > 10$

## 4) Analogias

A intensidade de turbulência sozinha não caracteriza a turbulência totalmente. Um outro importante parâmetro para estudo da turbulência é o coeficiente de correlação entre duas ou mais propriedades turbulentas:

$$R_{\varphi \dots \xi} = \frac{\overline{\varphi' \dots \xi'}}{\sqrt{\overline{\varphi'^2}} \dots \sqrt{\overline{\xi'^2}}} \quad [20]$$

Seria de se esperar que esse coeficiente fosse igual à unidade sempre que as propriedades variassem devido a um único e mesmo mecanismo.

Quando a correlação entre a flutuação de uma propriedade  $\varphi$  e a da velocidade for  $R_{\varphi v} = 1$  então também  $Pr_{\Phi T} = 1$  e surge a Analogia de Reynolds:

considerando um escoamento, em estado estacionário sem produção unidimensional com  $\lambda_{\Phi T} \gg \lambda_{\Phi \ell}$ : da eq. [6]:

$$\overline{v v} = \ell_m^2 \left| \text{grad} \overline{v} \right| \text{grad} \overline{v} \quad [21]$$

$$\overline{v \varphi} = (\rho Pr_{\Phi T})^{-1} \ell_m^2 \left| \text{grad} \overline{v} \right| \text{grad} \overline{\varphi} \quad [22]$$

considerando unidimensional  $v = v_z$ :

$$\overline{v_z v_z} = \ell_m^2 \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial y} \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial y} \quad [23]$$

$$\overline{v_z \varphi} = \frac{\ell_m^2}{\rho Pr_{\Phi T}} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial y} \quad [24]$$

dividindo [24] por [23] e considerando que a relação entre o transporte de momentum e o da propriedade  $\varphi$  em qualquer posição deve ser aproximadamente a uma constante  $\beta$ :

$$\frac{\overline{\varphi}}{\overline{v_z}} \rho Pr_{\Phi T} = \frac{\partial \overline{\varphi} / \partial y}{\partial \overline{v_z} / \partial y} \cong \beta \quad [25]$$

os termos do segundo membro na parede podem ser escritos como coeficientes da interface:

$$\tau_w = \rho v \left( \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial y} \right)_w = \frac{f \rho \overline{v_b}^2}{2} \quad ; \quad \left| \overline{j_{\Phi}} \right|_w = \rho \lambda_{\Phi} \left( \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} \right)_w = c_{\Phi} (\overline{\varphi_b} - \overline{\varphi_w})$$

então:

$$\left( \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial y} \right)_w = \frac{f \overline{v_b}^2}{2 v} \quad ; \quad \left( \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} \right)_w = \frac{c_{\Phi} (\overline{\varphi_b} - \overline{\varphi_w})}{\rho \lambda_{\Phi}} \quad [26]$$

como  $c$  é constante vale também para a parede:

$$\beta = \frac{c_{\phi} (\bar{\phi}_b - \bar{\phi}_w) 2 v}{\lambda_{\phi} f \bar{v}_b^2} \quad [27]$$

integrando o primeiro membro da parede até uma posição onde as propriedades são as bulk (b):

$$\beta = \frac{\bar{\phi}_b - \bar{\phi}_w}{\bar{v}_b - \bar{v}_w} \rho Pr_{\phi T} = \frac{\bar{\phi}_b - \bar{\phi}_w}{\bar{v}_b} Pr_{\phi T} \quad [28]$$

onde a velocidade na parede foi considerada nula.  
Agrupando [25], [26] e [27]:

$$\beta = \frac{\bar{\phi}_b - \bar{\phi}_w}{\bar{v}_b} Pr_{\phi T} = \frac{2 v c_{\phi} (\bar{\phi}_b - \bar{\phi}_w)}{\lambda_{\phi} f \bar{v}_b^2} \quad [29]$$

então:

$$c_{\phi} = \frac{f \rho \bar{v}_b}{2} \frac{\lambda_{\phi}}{v} Pr_{\phi T} \quad [30]$$

Sendo  $Nu_{\phi} = C_{\phi} D / \lambda_{\phi}$

$$Nu_{\phi} = \frac{c_{\phi}}{\lambda_{\phi}} D = \frac{f \bar{v}_b D}{2 v} Pr_{\phi T} \quad [31]$$

então:

$$j_{\phi} = \frac{Nu_{\phi}}{Re Pr_{\phi T}} = \frac{f}{2} \quad [32]$$

experimentalmente verifica-se que:  $0,5 < Pr_{\phi T} < 2$

sendo  $Pr_{\phi T} = 1$  -> Analogia de Reynolds

sendo  $Pr_{\phi T} = Pr_{\phi}^{2/3}$  -> Colburn

$$\frac{Nu_{\phi}}{Re Pr_{\phi}^{1/3}} = \frac{f}{2} \quad [33]$$